

BONNER MATHEMATISCHE SCHRIFTEN

Herausgeber:

E. BRIESKORN, J. FREHSE, ST. HILDEBRANDT,
F. HIRZEBRUCH, W. KLINGENBERG, R. LEIS,
I. LIEB, E. PESCHL, H. UNGER, W. VOGEL

Nr. 87

Jost-Hinrich Eschenburg

Stabilitätsverhalten des Geodätischen Flusses
Riemannscher Mannigfaltigkeiten

BONN 1976

Als Manuskript gedruckt im
Mathematischen Institut der Universität
Bonn, Wegelerstraße 10

Eingegangen am 5. Dezember 1975

STABILITÄTSVERHALTEN
DES GEODÄTISCHEN FLUSSES
RIEMANNSCHER MANNIGFALTIGKEITEN

Inauguraldissertation zur Erlangung des Doktorgrades der
Hohen Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Rheinischen Friedrich-Wilhelm-Universität zu Bonn

vorgelegt von Jost-Hinrich Eschenburg
aus Lübeck

Bonn 1975

Angefertigt mit Genehmigung der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Bonn

Referent:	Prof. Dr. Klingenberg
Koreferent:	Prof. Dr. Karcher

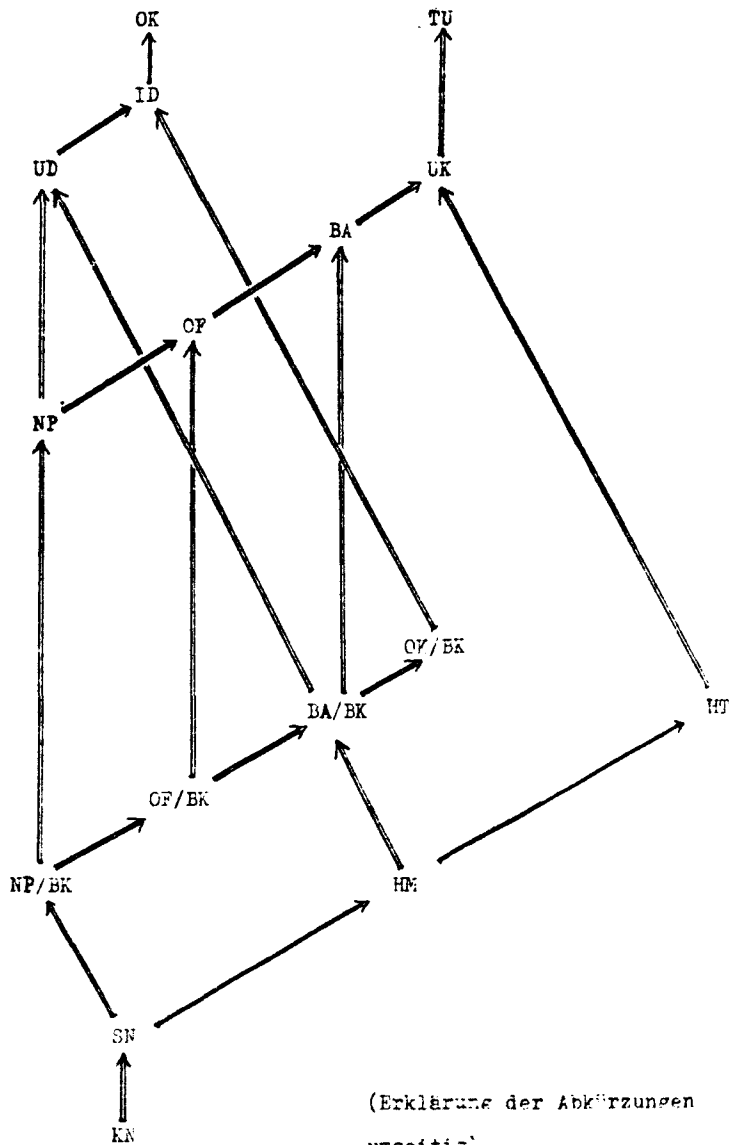
Inhaltsverzeichnis

Einführung	1
1. Benachbarte Geodätische	3
1.1 Tangentialbündel und Differential des Geodätischen Flusses	3
1.2 Jacobitensoren	7
1.3 Asymptotische Lösungen	13
1.4 Kongruenzen und Hyperflächen	16
1.5 II. Fundamentaltensor und Abstandsfunktion einer Hyperfläche	24
1.6 Die Volumenexpansion einer Kongruenz	29
2. Infinitesimale Divergenz	35
2.1 Abschätzungen von Lagrange-Tensoren	35
2.2 Mannigfaltigkeiten ohne konjugierte Punkte	41
2.3 Volumen weit entfernter Hyperflächen	46
3. Mannigfaltigkeiten beschränkter Asymptote	51
3.1 Wachstum der Jacobifelder	51
3.2 Unendliche Konvergenz und Topologie im Unendlichen	54
3.3 Horosphären	60
3.4 Die stabile Blätterung	66

3.5 Vergleichssätze	74
4. Mannigfaltigkeiten ohne Fokalphunkte	78
4.1 Konvexität	78
4.2 Jacobifelder und Abstandsfunktion	80
4.3 Isometrien und Fundamentalgruppe	87
5. Hyperbolische Mannigfaltigkeiten und hyperbolischer Typ	97
5.1 Hyperbolische und negativ gekrümmte Mannigfaltigkeiten	97
5.2 Geodätische auf hyperbolischen Mannigfaltigkeiten	102
5.3 Mannigfaltigkeiten vom hyperbolischen Typ	108
5.4 Kompaktheit	113
Anhang: $\binom{1}{1}$ -Tensorfelder längs Geodätischer	118
Literaturverzeichnis	121

Zusammenhang der Begriffe

(bei einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten)



Abkürzungen

- BA: Beschränkte Asymptote, s. 3.1
BK: Beschränkte Krümmung: $K > -r^2$
HM: Hyperbolische Mannigfaltigkeit, s. 5.1
HT: Hyperbolischer Typ, s. 5.3
ID: Infinitesimale Divergenz, s. 2.2
KN: Konstant negative Krümmung: $K = -k^2$
NP: Nichtpositive Krümmung: $K \leq 0$
OF: Ohne Fokalepunkte, s. 4.2
OK: Ohne konjugierte Punkte, s. 2.2
SN: Strikt negative Krümmung: $-k^2 > K > -r^2$
TU: Topologie im Unendlichen, s. 3.2
UD: Uniforme Divergenz, s. 2.2
UK: Unendliche Konvergenz, s. 3.2

Stabilität und Instabilität des Geodätischen Flusses wurden auf 2-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeiten strikt negativer Krümmung schon im 19. Jahrhundert von LOBATSCHESKI und HADAMARD ([16]) untersucht. In neuerer Zeit befaßte sich ANOSOV ([2]), mit den ergodischen Eigenschaften von Flüssen dieses Typs, und EBERLEIN ([5], [6]) und KLINGENBERG ([19]) konnten zeigen, daß die bekannten Eigenschaften der Mannigfaltigkeiten strikt negativer Krümmung sämtlich Konsequenzen des Stabilitätsverhalten des geodätischen Flusses sind.

Auch für umfassendere Klassen von Riemannschen Mannigfaltigkeiten versuchte man seit langem, das Verhalten der Geodätischen im Großen zu bestimmen. Die schwächste Voraussetzung, die man in diesem Zusammenhang gestellt hat, fordert, daß es auf der Mannigfaltigkeit keine konjugierten Punkte geben soll. Das heißt im einfach zusammenhängenden Fall, daß je zwei verschiedene Punkte sich durch genau eine Geodätische verbinden lassen. Für derartige Mannigfaltigkeiten bewies L. GREEN 1956 ([10]) unter der Zusatzvoraussetzung beschränkter Krümmung, daß ein Variationsvektorfeld einer Schar von Geodätischen, die sich in einem Punkte alle schneiden, genügend weit entfernt von diesem Schnittpunkt beliebig lang wird. Daraus hoffte er, die uniforme Divergenz der Geodätischen schließen zu können, insbesondere, daß sich zwei von einem Punkt ausgehende geodätische Strahlen beliebig weit voneinander entfernen. Der Beweis war jedoch in Dimensionen > 2 nicht vollständig, und trotz manchen Anstrengungen in diese Richtung ist das Problem für Mannigfaltigkeiten der Dimension $n \geq 3$ noch offen. Diese Fragen werden in Kapitel 2 der vorliegenden Arbeit behandelt. Für Spezialfälle kann die Frage jedoch positiv entschieden

werden, z.B. für jene Mannigfaltigkeiten, auf denen alle Riemannschen Kugeln konvex sind ("Mannigfaltigkeiten ohne Fokalpunkte"). Eine allgemeinere Klasse von Mannigfaltigkeiten ohne konjugierte Punkte, die sowohl die Mannigfaltigkeiten ohne Fokalpunkte, insbesondere die von nichtpositiver Schnittkrümmung, als auch die vom ANOSOV-Typ umfaßt und auf der die Vermutung von GREEN richtig ist, wird in Kapitel 3 eingeführt: Mannigfaltigkeiten beschränkter Asymptote. Sie sind dadurch charakterisiert, daß es wie in dem von ANOSOV beschriebenen Fall eine invariante n -Blätterung von stabilen Richtungen auf M gibt, aber nicht mehr notwendig eine dazu transversale und unter dem Geodätischen Fluß instabile invariante Blätterung. Es zeigt sich weiterhin, daß viele Eigenschaften der Mannigfaltigkeiten nichtpositiver Krümmung allein Konsequenzen dieses Stabilitätsverhaltens der Geodätischen sind, so die Existenz von Horosphären und unendlich fernen Punkten. Kapitel 4 und 5 bringen dann einige Anwendungen auf die beiden wichtigsten Spezialfälle, die ANOSOV-Mannigfaltigkeiten und die Mannigfaltigkeiten ohne Fokalpunkte.

In dieser Arbeit wird durchweg die auch von GREEN und EBERLEIN ([6]) benutzte Matrizen- oder (basisfrei) Tensordarstellung der Jacobifelder verwendet. Dieser Kalkül sowie seine geometrisch-anschauliche Bedeutung werden in Kapitel 1 entwickelt. Insbesondere soll die Verbindung von Jacobitensorfeldern und Hyperflächen gezeigt werden, die später beim Beweis der C^2 -Differenzierbarkeit der Horosphären Verwendung findet. Diejenigen neuen oder neu bewiesenen Sätze, die als Resultate festgehalten werden sollen, sind unter der Bezeichnung "Theorem" durchnummeriert.

Besonderen Dank schulde ich Professor Klingenberg und Professor Karcher, die diese Arbeit betreut haben, sowie P.Eberlein und J.J.O'Sullivan für hilfreiche Diskussionen und wichtige Hinweise.

1. Benachbarte Geodätische

1.1 Tangentialbündel und Differential des Geodätischen Flusses

111. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer kovarianten Ableitung von Vektorfeldern (affiner Zusammenhang) ∇ . TTM , das Tangentialbündel von TM , zerfällt unter dem Zusammenhang in natürlicher Weise in einen horizontalen Anteil \mathcal{H} und einen vertikalen \mathcal{V} . Das vertikale Bündel enthält alle Vektoren tangential zu den Fasern $T_p M$ und läßt sich beschreiben als Kern des Differentials $\pi_* : TTM \rightarrow TM$ der Projektion des Tangentialbündels. Ist $w \in TTM$ der Tangentialvektor einer Kurve $X(u)$ in TM , so ist

$$\pi_*(w) = \pi_* \left(\frac{d}{du} X(u) \right) = \frac{d}{du} \pi X(u) ,$$

das Bild ist der Tangentialvektor der Fußpunktkurve.

Das horizontale Bündel \mathcal{H} enthält alle Vektoren tangential zu kovariant konstanten (parallelen) Vektorfeldern auf M längs einer Kurve. \mathcal{H} ist der Kern der sog. Zusammenhangsabbildung $K : TTM \rightarrow TM$. Ist $w \in TTM$ wie oben beschrieben, so ist K definiert durch

$$K(w) = K \left(\frac{d}{du} X(u) \right) := \frac{D}{du} X(u) .$$

K bildet also die gewöhnliche Ableitung auf die kovariante ab.

Natürlich sind \mathcal{V} und \mathcal{H} transversal zueinander, denn ein nichtkonstantes paralleles Vektorfeld $X(t)$ kann nicht tangential zu einer Faser sein. Die Fasern von \mathcal{V} und \mathcal{H} haben beide die Dimension von M ; für \mathcal{V} ist das nach Definition klar, und für \mathcal{H} gilt es, weil wir einen Vektor $x \in T_p M$ in jede Richtung parallelverschieben können. Mit Hilfe des zurückgeholten Tangentialbündels

$$\tau^* TM := \{ (v, w) \in TM \times TM \mid \tau v = \tau w \}$$

können wir K und π_* zu Bündelabbildungen über TM erweitern:

$$K, \pi_* : \tau^* TM \rightarrow \tau^* TM$$

und folgendes Ergebnis notieren:

Satz: Die Abbildung

$$\tau_* \oplus K : TTM = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V} \longrightarrow \tau^*TM \oplus \tau^*TM$$

ist ein Isomorphismus von Vektorraumbündeln über TM. \square

Wir werden in Zukunft TTM mit $\tau^*TM \oplus \tau^*TM$ identifizieren und für $w \in T_x TM$ schreiben: $w = (w_H, w_V)$, wobei $w_H = \tau_* w$, $w_V = Kw$ die Komponenten in $T_x M$ sind.

112. Eine Kurve $c : I \rightarrow M$, I ein reelles Intervall, heißt Geodätische, wenn ihr Tangentialvektorfeld $\frac{dc}{dt}(t) = c'(t)$ für alle $t \in I$ kovariant konstant (parallel) ist:

$$\frac{D}{dt} \frac{dc}{dt} := \nabla_{c'} c' = 0.$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung, die für vorgegebenen Anfangstangentialvektor $v \in TM$ eindeutig lösbar ist. Die zugehörige Lösungskurve heiße c_v , die Geodätische mit Anfangsvektor $c_v'(0) = v$; sie kann auf ganz \mathbb{R} fortgesetzt werden. Auf diese Weise erhalten wir eine reell parametrisierte Schar von Diffeomorphismen (Fluß)

$$\phi_t = (v \mapsto c_v'(t)) : TM \rightarrow TM,$$

genannt der Geodätische Fluß von M. Er erfüllt die Eigenschaften eines Sprays, d.h.

(i) für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $v \in TM$ gilt

$$\frac{d}{dt} \pi \phi_t(v) = \phi_t(v)$$

(Differentialgleichung 2.Ordnung) und

(ii) für alle $s, t \in \mathbb{R}$

$$\phi_t(sv) = s \phi_{st}(v)$$

(Spraysigenschaft).

Wir wollen nun das Differential ϕ_{t*} des Geodätischen Flusses untersuchen. Sei $w = w(0) \in T_v TM$, $w(t) := \phi_{t*} w$. Ist w nicht vertikal, so können wir w als Tangentialvektor $\frac{d}{du} X(0)$ eines Vektorfeldes $X(u)$ mit $X(0) = v$ Länge einer nichtkonstanten Fußpunktkurve $\pi X(u)$ auffassen.

Horizontalkomponente:

$$w_H(t) = \pi_* w(t) = \pi_* \phi_{t*} w = \frac{d}{du} \pi \phi_t X(u) \Big|_{u=0}$$

Dies ist also das Variationsvektorfeld der Schar von Geodätischen

$c_u(t) := \pi \phi_t X(u)$. Derartige Vektorfelder heißen Jacobifelder, und durch zweifache kovariante Differentiation nach t (bezeichnet mit $'$) ergibt sich für sie die Differentialgleichung

$$w_H'' + T(w_H, c')' + R(w_H, c')c' = 0$$

Dabei soll für Vektorfelder X und Y bezeichnen:

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad \text{den Torsionstensor und}$$

$$R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]} \quad \text{den Krümmungstensor des Zusammenhanges;}$$

weiterhin sei $c(t) := c_0(t) = \pi \phi_t v$

Vertikalkomponente:

$$\begin{aligned} w_V(t) &= K w(t) = K \phi_{t*} w = \frac{D}{du} \phi_t X(u) \Big|_{u=0} = \frac{D}{du} \frac{d}{dt} c_u(t) \Big|_{u=0} \\ &= \frac{D}{dt} \frac{d}{du} c_u(t) + T\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial t}\right) \Big|_{u=0} \\ &= \frac{D}{dt} w_H(t) + T(w_H(t), c'(t)) \end{aligned}$$

Fassen wir zusammen:

Satz: Sei $w \in T_v TM$ und $w(t) = \phi_{t*} w$. Sei c die Geodätische mit Anfangsvektor v .

Dann ist $w_H(t)$ Jacobifeld längs c , und $w(t)$ erfüllt das folgende System kovarianter Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} w_V' = -R(w_H, c')c' \\ w_H' = w_V - T(w_H, c') \end{cases}$$

□

113. Im folgenden sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $n+1$. Sei jetzt $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ eine Riemannsche Metrik auf M und ∇ der zugehörige Levi-Civita-Zusammenhang. g induziert in natürlicher Weise eine Metrik \hat{g} auf $\pi^* TM \oplus \pi^* TM$ und damit auf TTM die Metrik $\bar{g} := (\pi_* \oplus K)^* \hat{g}$. Dabei erhalten \mathcal{H}_v und \mathcal{V}_v via π_* und K die Metrik von $T_{\pi(v)} M$ und stehen senkrecht aufeinander. So wird TM zur Riemannschen Mannigfaltigkeit.

Gewöhnlich wollen wir die trivialen Fälle von Jacobifeldern tangential zur Geodätischen ausschließen. Wegen der Torsionsfreiheit des Levi-Civita-Zusammenhanges wird aus dem Differentialgleichungssystem 112 die übliche Jacobigleichung: Ein Vektorfeld J längs einer Geodätischen $c:I \rightarrow M$ ist ein Jacobifeld genau dann, wenn

$$J'' + R(J, c')c' = 0$$

erfüllt ist. Für die Tangentialkomponente gilt nun:

$$\langle J, c' \rangle'' = \langle J'', c' \rangle = -\langle R(J, c')c', c' \rangle = 0 ;$$

sie ist also von der Form

$$\langle J(t), c'(t) \rangle = at + b, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

J ist somit Summe zweier Jacobifelder:

$$J = J_1 + J_2, \quad ,$$

wobei für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$J_1(t) = \langle J(t), c'(t) \rangle c'(t) = (at + b) \cdot c'(t),$$

$$J_2(t) \perp c'(t).$$

Die zu J_i gehörigen Tangentialvektoren von TM , $w_i(t) = (J_i(t), J_i'(t))$ ($i=1,2$), spannen zwei ∇_t -invariante Unterbündel von TTM auf: \mathcal{R} und $\mathcal{R}^\perp := T^*TM = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$ mit den Fasern

$$\mathcal{R}_v = \{(av, bv) \in T_v TM \mid a, b \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathcal{H}'_v = \{(x, 0) \in T_v TM \mid x \perp v\},$$

$$\mathcal{V}'_v = \{(0, x) \in T_v TM \mid x \perp v\}.$$

Weil die Diffeomorphismen $\phi_t: TM \rightarrow TM$ die Länge der Vektoren erhalten, können wir uns zudem auf Vektoren der Länge 1 beschränken, d. h. auf das Sphärenbündel SM , und ϕ_t als einen Diffeomorphismus von SM auffassen. Wegen der Spray-Eigenschaft (112.11) geht dabei keine Information verloren. Unter einer "Geodätischen" $c:I \rightarrow M$ werden wir daher auch immer eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische ($|c'| = 1$) verstehen. Das Differential des Geodätischen Flusses soll dann insbesondere auf dem $2n$ -Bündel $T^*SM := T^*TM|_{SM} \subset TSM$ untersucht werden.

114. Mit Hilfe der Metrik ist auf TTM in natürlicher Weise eine symplektische Form ω definiert: Sei $a, b \in T_v TM$, dann ist

$$\omega(a, b) := \langle a_H, b_V \rangle - \langle a_V, b_H \rangle$$

Satz: ω ist ϕ_t -invariant.

Bew.:

$$\begin{aligned} \omega(a(t), b(t))' &= \langle a_H'(t), b_V(t) \rangle + \langle a_H(t), b_V'(t) \rangle \\ &\quad - \langle a_V'(t), b_H(t) \rangle - \langle a_V(t), b_H'(t) \rangle \\ &= [\langle a_V, b_V \rangle + \langle a_H, R(b_H, c')c' \rangle - \langle R(a_H, c')c', b_H \rangle \\ &\quad - \langle a_V, b_V \rangle](t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

wegen der Krümmungsidentitäten. □

Def.: Ein Unterraum oder ein Unterbündel $L \subset TTM$ heißt Lagrange-Unterraum oder -bündel, wenn $\omega|_L = 0$ ist.

Beispiele von Lagrange-Unterbündeln sind \mathcal{H} und \mathcal{V} . In § 1.4 werden wir zu weniger trivialen Beispielen kommen.

1.2 Jacobitensoren

121. Es sei M^{n+1} wieder eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wir sahen, daß die gesamte infinitesimale Information über den Geodätischen Fluß in den Jacobifeldern steckt, also Vektorfeldern $J(t)$ längs einer Geodätischen $c(t)$, die der kovarianten Differentialgleichung

$$(J) \quad J'' + R(J, c')c' = 0$$

genügen. Wir werden uns für das Wachstum dieser Jacobifelder mit fortlaufendem Parameter t interessieren. Dafür werden wir die Lösungen von (J) mit Parallelfeldern vergleichen, d.h. mit Feldern $P(t)$ längs c , die die kovariante Differentialgleichung

$$(P) \quad P' = 0$$

lösen. Dieser Vergleich zwischen linearisiertem Geodätischem Fluß

und Parallelverschiebung geschieht durch die Jacobitensoren.

Sei dazu eine Geodätische $c = c_v : \mathbb{R} \rightarrow M$, $v \in S_p M$ fest gewählt. Wie in 113 diskutiert, betrachten wir nur Vektoren, die auf c senkrecht stehen, also das Normalenbündel $N_c := \{\bar{x} \in T_{c(t)}M \mid \bar{x} \perp c'(t), t \in \mathbb{R}\}$. Wollen wir den Anfangsvektor $v \in SM$ variabel lassen, so betrachten wir statt dessen das normale zurückgeholte Tangentialbündel $\pi_v'^* TM$ über SM mit den Fasern

$$\pi_v'^* TM := \{(\bar{v}, \bar{x}) \in \pi_v'^* TM \mid \bar{x} \perp \bar{v}\} = \{\bar{v}\} \times N_{0c_v}.$$

Um die Lösungen von (J) und (P) vergleichen zu können, müssen wir uns zunächst auf einen n -dimensionalen Unterraum des Lösungsraums von (J) beschränken. Den erhalten wir durch eine injektive Abbildung $f : N_{0c} \rightarrow T_v'^* SM$, nämlich den Raum der Jacobifelder

$$J_x(t) := \nabla_x \phi_{t,v} f(x), \quad x \in N_{0c}$$

Def.: Der zu der injektiven linearen Abbildung $f : N_{0c} \rightarrow T_v'^* SM$ gehörige Jacobitensor Y_f ist das $\binom{1}{1}$ -Tensorfeld längs c $Y_f(t) : N_{tc} \rightarrow N_{tc}$, so daß das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} T_v'^* SM & \xrightarrow{\phi_{c,v}} & T_{\phi_{c,v}}'^* SM \\ f \uparrow & & \downarrow \pi_v \\ N_{0c} & \xleftarrow{P_t^{-1}} N_{tc} \xrightarrow{Y_f(t)} & N_{tc} \end{array}$$

Ist $f : \pi_v'^* TM \rightarrow T_v'^* SM$ ein injektiver Bündelhomomorphismus über SM , so ist Y_f entsprechend faserweise definiert.

Dabei ist $P_t : T_{c(0)}M \rightarrow T_{c(t)}M$ die Parallelverschiebung der Vektoren längs c . Der Einfachheit halber werden wir diese Abbildung in der Notation unterdrücken und $T_{c(0)}M$ mit $T_{c(t)}M$ vermöge P_t identifizieren für alle $t \in \mathbb{R}$, solange keine Irrtümer zu befürchten sind.

Wir können einen Jacobitensor $Y = Y_f$ längs c auch so be-

schreiben: Für jeden Vektor $x \in N_0 c$ ist $J_x(t) = Y(t)x$ das Jacobi-feld mit den Anfangswerten $J_x(0) = \pi_* f_x$, $J'_x(0) = Kf_x$. Die kovariante Ableitung ist $J'_x = (Yx)' = Y'x$. Fassen wir $R(,c')c'$ noch als $\binom{1}{1}$ -Tensorfeld längs c auf:

$$R(t) = R_Y(t) := (x \mapsto \kappa(x, c'(t))c'(t)): N_{t,c} \rightarrow N_{t,c},$$

so ergibt sich aus Gleichung (J) für J_x die folgende kovariante Tensor-Differentialgleichung für Y :

$$(1) \quad Y'' + R \cdot Y = 0$$

Gehen wir umgekehrt von einer Lösung von (1) aus, das ist ein $\binom{1}{1}$ -Tensorfeld $Y(t): N_{t,c} \rightarrow N_{t,c}$, das der Gleichung (1) genügt und einen n -dimensionalen Raum von Vektorfeldern $\{Y_x \mid x \in N_0 c\}$ längs c aufspannt, so können wir die zugehörige Einbettung $f = f_Y: N_0 c \rightarrow T_V^1 SM$ bestimmen: Für $x \in N_0 c$ ist $f(x)$ das eindeutig bestimmte Element $w \in T_V^1 SM$, für das gilt:

$$w_H(t) = Y(t)x.$$

Fassen wir zusammen:

Satz: Sei $c: I \rightarrow M$ Geodätische mit Anfangsvektor $c'(0) = v$.

Dann stehen die Lösungen der kovarianten Tensor-Differentialgleichung (1) in bijektiver Korrespondenz zu den injektiven Homomorphismen $f: N_0 c \rightarrow T_V^1 SM$.

Die Lösungen von (1) und die Jacobitensoren längs c sind identisch. □

122. Wieviele Lösungen von (1) gibt es nun und wie hängen sie voneinander ab? Sind A, B zwei Lösungen von (1) und ist $A(t)$ regulär (invertierbar) für alle $t \in I$, so gibt es einen Tensor $X(t)$ mit

$$B(t) = A(t)X(t) \quad \text{für alle } t \in I.$$

Aus Gleichung (1) erhalten wir

$$A''X + 2 A'X' + AX'' + RAX = 0$$

und daraus, weil A Lösung ist,

$$X'' + 2A^{-1}A'X' = 0$$

Das Tensorfeld $Z := X'$ erfüllt also die Gleichung 1. Ordnung

$$(2) \quad Z' + 2 A^{-1} A' \cdot Z = 0 \quad .$$

Für $n=1$ sind die Lösungen dieser Gleichung bekannt:

$$Z = C A^{-1} A^{-1}$$

für beliebige reelle Konstante C . Das ist auch noch für beliebiges n mit einem konstanten Tensor C richtig, sofern Exponentialfunktion und Logarithmus von Tensoren sich wie im 1-dimensionalen Fall ableiten lassen. (Für die Ableitungsregeln von $\binom{1}{1}$ -Tensorfeldern vgl. Anhang!) Dies wiederum ist genau dann der Fall, wenn

$$(+)\quad A'A = AA' \quad .$$

Leider gibt es keinen vernünftigen Grund anzunehmen, daß (+) erfüllt ist. Falls die Lösung A aber zu einem Lagrange-Unterraum $Bild f_A \subset T_{\mathcal{V}}SM$ gehört, können wir die Relation (+) durch eine ähnliche ersetzen: In diesem Fall gilt nämlich für alle $x, y \in N_0 c$:

$$\langle Ax, A'y \rangle - \langle A'x, Ay \rangle = 0$$

und damit

$$A'^*A - A^*A' = 0$$

Def.: Seien Y_1 nicht notwendig verschiedene Jacobitensoren längs c , $i = 1, 2$. Der Tensor

$$W(Y_1, Y_2) := Y_1'^* Y_2 - Y_1^* Y_2'$$

heißt Wronskitensor von Y_1, Y_2 .

Wegen der Invarianz von ω unter dem Geodätischen Fluß (114) ist $W(Y_1, Y_2)$ kovariant konstant längs c .

Ein Jacobitensor Y heißt Lagrange-Tensor, wenn

$$W(Y, Y) = 0 \quad .$$

Wir setzen also weiterhin voraus, daß A ein Lagrange-Tensor ist. Anstelle von (+) haben wir dann

$$(3) \quad A'^*A = A^*A' \quad , \quad \text{oder} \quad A'A^{-1} = (A'A^{-1})^* \quad ,$$

und in der Tat erhalten wir unter dieser Voraussetzung eine ähnliche Lösung für (2):

$$Z = C \cdot A^{-1} A'^{-1} = C(A^*A)^{-1},$$

wie man durch Ableiten sieht:

$$\begin{aligned} Z' &= C(A^{-1} A'^{-1} + A^{-1} A'^{-1}) = -C A^{-1} (A' A^{-1} + A'^{-1} A'^{-1}) A'^{-1} \\ &= -2CA^{-1} A' A^{-1} A'^{-1} = -2 A^{-1} A' \cdot Z. \end{aligned}$$

(3)

Mit $X' = Z$ erhalten wir

$$X(t) = C_1 \cdot \int_{t_0}^t (A^*A)^{-1}(u) du + C_2$$

für zwei kovariant konstante Tensoren C_1 und C_2 (vgl. Anhang).

Dabei kann t_0 zweckmäßig gewählt werden, und C_1, C_2 werden aus den Anfangs- oder Randbedingungen der Lösung $B = AX$ bestimmt.

Wir haben also bewiesen:

Satz: Sei $c: I \rightarrow M$ eine Geodätische und A ein auf ganz I regulärer Lagrangetensor längs c . Für jeden Jacobitensor B längs c gibt es dann konstante Tensoren C_1, C_2 und $t_0 \in I$ so, daß sich B darstellen läßt als

$$B(t) = A(t)X(t)$$

mit

$$X(t) = C_1 \int_{t_0}^t (A^*A)^{-1}(u) du + C_2.$$

□

123. Die Regularitätsvoraussetzung in dem vorstehenden Satz ist keine starke Einschränkung, wie der folgende Satz zeigt:

Satz: Sei Y ein Lagrange-Tensor längs einer Geodätischen $c: I \rightarrow M$. Dann ist $\text{Sing } Y := \{t \in I \mid Y(t) \text{ singular}\}$ eine diskrete Teilmenge von I .

Bew.: Sei $f(t) := \det Y(t)$. Wir nehmen an, daß $Y(0)$ singular ist, also $f(0) = 0$. Zu zeigen ist: Es gibt eine natürliche Zahl k , $1 \leq k \leq n$, für die

$$f^{(k)}(0) \neq 0 \text{ und } f^{(l)}(0) = 0 \text{ für } 0 \leq l \leq k-1.$$

Dann ist nämlich $f(t) \neq 0$ für $0 < t \leq \epsilon$ und Y regulär in $(0, \epsilon)$. Sei dazu x_1, \dots, x_n eine Orthonormalbasis von $N_{0,c}$, und zwar so, daß die ersten k eine Basis von $\ker Y(0)$

bilden. Sei $\bar{x} := x_1 \wedge \dots \wedge x_n$, $J_i := Yx_i$ für $1 \leq i \leq n$.

Dann ist

$$(\det Y)\bar{x} = J_1 \wedge \dots \wedge J_n,$$

also

$$f^{(k)}(0) \cdot \bar{x} = J_1'(0) \wedge \dots \wedge J_k'(0) \wedge J_{k+1}(0) \wedge \dots \wedge J_n(0)$$

(alle übrigen Terme sind 0) und alle niedrigeren Ableitungen von f verschwinden bei 0. Die $J_i'(0)$ für $1 \leq i \leq k$ sind linear unabhängig, denn anderenfalls gäbe es ein $x \in \ker Y(0)$, $x \neq 0$, mit $Y'(0)x = 0$, also $Yx = 0$. Das hieße aber $f_Y(x) = 0$, und f_Y wäre nicht injektiv im Widerspruch zu 121. Weil weiterhin Y Lagrange-Tensor ist, gilt

$$0 = [\langle J_i', J_j \rangle - \langle J_i, J_j' \rangle](0) = \langle J_i'(0), J_j(0) \rangle, \{ \substack{1 \leq i \leq k \\ k < j \leq n} \}.$$

Auch die Vektoren $J_j(0)$ sind also von den $J_i'(0)$ linear unabhängig, und ebenso sind die $J_j(0)$ unter sich linear unabhängig, sonst läge ja eine Linearkombination der x_j in $\ker Y(0)$, welcher doch von den x_i aufgespannt wird. So sind alle Vektoren in dem äußeren Produkt $f^{(k)}(0)\bar{x}$ voneinander linear unabhängig. $f^{(k)}(0)$ kann somit nicht verschwinden. □

Besonders interessant sind die Singularitäten des Jacobitensors \underline{A} (dieser Buchstabe wird in Zukunft für diesen Tensor reserviert), der durch die folgenden Anfangsbedingungen charakterisiert wird:

$$A(0) = 0, \quad A'(0) = 1$$

Wegen $W(A, A) = W(A, A)(0) = 0$ ist A Lagrange-Tensor.

Def.: Sei A der durch vorstehende Anfangswerte gekennzeichnete Jacobitensor längs einer Geodätischen $c: \mathbb{R} \rightarrow M$. Ist $t \neq 0$ eine Singularität von A , so heißt $c(t)$ ein zu $c(0)$ konjugierter Punkt auf c . Die Jacobifelder Ax mit $x \in \ker A(t)$ haben Nullstellen bei 0 und t .

1.3 Asymptotische Lösungen

131. Wir interessieren uns nun für Lösungen von

$$(1) \quad Y'' + RY = 0$$

längs einer Geodätischen $c: \mathbb{R} \rightarrow M$, die zur Zeit 0 einen gegebenen Anfangswert haben und weit draußen verschwinden. Diese Randwertaufgabe ist lösbar, wenn dazwischen keine konjugierten Punkte liegen, d.h. wenn kein nichttriviales Jacobifeld dort mehr als eine Nullstelle hat. Falls also $c|_{[0,s]}$ ohne konjugierte Punkte ist, sei $Y = D_s$ die Lösung von (1) mit den Randwerten

$$D_s(0) = 1, \quad D_s(s) = 0 \quad (s > 0).$$

D_s läßt sich nach 122 im Intervall $(0, s]$ durch den Lagrangetensor A ausdrücken, wobei C_1 und C_2 aus den Randwerten zu berechnen sind. Die zweite Randbedingung erfüllen wir am einfachsten, indem wir $t_0 = s$ und $C_2 = 0$ wählen. Setzen wir für den Moment

$$Y(t) = A(t) \int_s^t (A^* A)^{-1}(u) du, \quad t \in (0, s],$$

so ist in diesem Intervall $D_s(t) = C_1 Y(t)$, und wir berechnen C_1 , indem wir die Ableitung an der Stelle s ausrechnen. Für den Wronski-Tensor gilt:

$$W(A, D_s) = [A^* D_s - A^* D_s'](0) = 1,$$

also

$$1 = [A^* D_s - A^* D_s'](s) = -A^*(s) D_s'(s), \\ D_s'(s) = -A^{*-1}(s).$$

Andererseits

$$Y'(s) = A(s) \cdot A^{-1}(s) A^{*-1}(s) = -D_s'(s)$$

Somit ist $D_s = -Y$, $C_1 = -1$. Insbesondere haben wir gezeigt, daß

$$\lim_{t \rightarrow 0} A(t) \int_t^s (A^* A)^{-1}(u) du = 1.$$

Ergebnis:

$$D_s(t) = \begin{cases} A(t) \int_t^s (A^* A)^{-1}(u) du & \text{für } 0 < t \leq s \\ 1 & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

ist die Lösung dieses Randwertproblems. Ebenso können wir D_s für $s < 0$ beschreiben.

132. Ist $c| [0, \infty)$ ein Strahl, d.h. ohne konjugierte Punkte, so können wir s beliebig groß wählen. Gibt es in diesem Fall eine Grenzlösung $D := \lim_{s \rightarrow \infty} D_s$? Nur, wenn wir auch "konjugierte Punkte in ∞ " ausschließen, wie sich im folgenden Satz zeigen wird.

Die Grenzlösung D existiert genau dann, wenn die Anfangswerte der D_s konvergieren. Weil für alle s $D_s(0) = 1$ gilt, reicht es, die Ableitungen $D'_s(0)$ abzuschätzen. Weil auch die D_s Lagrange-Tensoren sind, ist $D'_s(0)$ ein symmetrischer Tensor für alle s ((3) in 122). Für solche Tensoren haben wir die durch positive Definitheit definierte Ordnungsrelation (vgl. Anhang).

Satz: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $c: [-\varepsilon, \infty) \rightarrow M$ Geodätische ohne konjugierte Punkte. Dann gilt

$$D'_r(0) < D'_s(0) < D'_\varepsilon(0) \quad \text{für alle } r, s \text{ mit } 0 < r < s.$$

Bew.:
$$D'_s(0) - D'_r(0) = (A(0) \int_r^s (A^* A)^{-1}(u) du)'$$
$$= \int_r^s (A^* A)^{-1}(u) du > 0,$$

denn $A^* A$ ist überall positiv definit. So folgt der erste Teil der Behauptung. - Für die Geodätische $c| [a, b]$ sei nun I_a^b die Indexform, die Hessische der Energiefunktion (vgl. [13], S. 142). Für die obere Abschätzung betrachten wir das gebrochene Jacobifeld J auf $c| [-c, s]$ mit

$$J| [-\varepsilon, 0] := D_{-\varepsilon} x \quad , \quad J| [0, s] = D_s x$$

für ein beliebiges $x \in N_0 c$. Die Indexform setzt sich additiv zusammen:

$$I_{-\varepsilon}^s(J, J) = I_{-\varepsilon}^0(J, J) + I_0^s(J, J)$$
$$= \langle D'(-\varepsilon)(0)x, x \rangle - \langle D'_s(0)x, x \rangle.$$

Die Indexform muß aber positiv definit sein auf Vektorfeldern, die an den Endpunkten verschwinden, andernfalls gäbe es konjugierte Punkte (vgl. [13], S. 145). Damit folgt der zweite Teil der Behauptung:

$$D'_\varepsilon(0) - D'_s(0) > 0 \quad .$$

□

Kor.: Sei $c:]-\epsilon, \infty) \rightarrow M$ Geodätische ohne konjugierte Punkte.

Dann konvergieren die Jacobitensoren D_s für $s \rightarrow \infty$ gegen einen Jacobitensor $D = AX$ mit

$$X(t) := \int_t^\infty (A^*A)^{-1}(u) du = D'(0) - D_t'(0).$$

Bew.: Die Funktion $s \mapsto D_s'(0)$ ist unter " $<$ " streng monoton wachsend und durch $D_t'(0)$ nach oben beschränkt, also konvergiert sie für $s \rightarrow \infty$ gegen einen Wert $D'(0) := \lim D_s'(0)$. Weil die Lösungen der Gleichung (1) stetig von ihren Anfangswerten abhängen, ist also die Lösung D von (1) mit den Anfangswerten $D(0) = 1$ und $D'(0)$ das eindeutig definierte Grenztensorfeld der D_s . Das auf $c/(0, \infty)$ definierte Tensorfeld $X = A^{-1}D$ ist der Limes der Felder $X_s = A^{-1}D_s$. Weil auf c keine konjugierten Punkte vorkommen, ist X_s für alle $t \in (0, \infty)$ gegeben durch

$$X_s(t) = \int_t^\infty (A^*A)^{-1}(u) du = D_s'(0) - D_t'(0),$$

woraus die Behauptung folgt.

133. Für alle $v \in SM$ sei jetzt D_{sv} der Jacobitensor auf der Geodätischen $c_v: [0, s] \rightarrow M$ ($s \neq 0$) mit den Randwerten 1 und 0, sofern c_v auf diesem Abschnitt keine konjugierten Punkte hat. Sei nun $c: \mathbb{R} \rightarrow M$ eine Geodätische mit Tangentialvektoren $v_t := c'(t)$. Die Jacobitensoren D_{r+s, v_0} und D_{s, v_r} , falls sie definiert sind, beschreiben denselben Raum von Jacobifeldern bis auf die Parametrisierung der Geodätischen, nämlich $(\frac{d}{ds}, \frac{d}{dr})$, die bei $r+s$ verschwindenden Jacobifelder längs c ($s \neq 0 \neq r+s$). Also unterscheiden sich diese Jacobitensoren nur um einen konstanten Tensor C , der sich an der Stelle r leicht berechnen läßt:

$$C = C \cdot D_{s, v_r}(0) = D_{s, v_r}(0) \cdot C = D_{r+s, v_0}(r).$$

Also gilt bis auf Parallelverschiebung:

$$D_{r+s, v_0}(r+t) = D_{r+s, v_0}(r) D_{s, v_r}(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, und die Tensoren der rechten Seite sind vertausch-

bar. Ist nun $c \in [-a, \infty)$ ohne konjugierte Punkte für ein $a > 0$, so daß $D_{v_t} := \lim_{s \rightarrow t} D_{v_t, s}$ für alle $t > -a$ existiert, so ergibt sich der Grenzübergang für $r, t, r+t > -a$:

$$D_{v_0}(r+t) = D_{v_0}(r) \cdot D_{v_r}(t) = D_{v_r}(t) \cdot D_{v_0}(r),$$

und speziell für $t = -r$:

$$D_{v_0}(r) = D_{v_r}^{-1}(-r).$$

1.4 Kongruenzen und Hyperflächen

141. Die Jacobitensoren besitzen eine anschaulich-geometrische Bedeutung, die für das Folgende nicht unwichtig ist, und die wir daher näher beschreiben wollen. Ausgangspunkt dieser Überlegungen ist der Begriff der nirgends singulären n -Parameter-Variation von Geodätischen, die wir in Anlehnung an die Bezeichnung in [17], wo diese Beziehungen für Lorentz-Mannigfaltigkeiten untersucht werden, Kongruenz nennen wollen:

Def.: Eine Kongruenz ist ein Diffeomorphismus

$$k : N \times I \rightarrow U \subset M,$$

wo N eine n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und I ein reelles Intervall bezeichnet, auf eine Umgebung U in M so, daß für alle $p \in N$ die Kurven $k_p : I \rightarrow M$ definiert durch $k_p(t) := k(p, t)$, Geodätische sind.

Sei also $k : N \times I \rightarrow M$ so eine Kongruenz. Für das Vektorfeld

$$V := k_* \left(\frac{d}{dt} \right)$$

auf $U = \text{Bild } k$ gilt dann genau

$$\nabla_V V = 0.$$

Dieses Vektorfeld nennen wir das Flußvektorfeld der Kongruenz.

Wir greifen uns nun eine der Geodätischen heraus, etwa $c := k_{p_0}$ für ein festes $p_0 \in N$ und möchten die Nachbargeodätischen von c

in der Kongruenz beschreiben. Das leisten die V -invarianten, zu c' orthogonalen Vektorfelder $J(t)$ längs c , die durch die Gleichung

$$[J, V] = L_V J = 0$$

charakterisiert sind. Diese ist äquivalent zu der Gleichung 1.Ordnung

$$J' = \nabla_V J = \nabla_J V =: \nabla V(J)$$

(Daraus folgt durch nochmaliges Differenzieren die Jacobigleichung:

$$J'' = \nabla_V \nabla_V J - \nabla_J \nabla_V V = -R(J, V)V \quad .)$$

Der Lösungsraum dieser Gleichung 1.Ordnung ist $(n+1)$ -dimensional; die zu c senkrechten Lösungen J_x sind also durch einen beliebigen Anfangsvektor $x \in N_{0c}$ eindeutig bestimmt (vgl. 113). Die gesuchten Lösungen können daher durch das Jacobitensorfeld

$$Y(t) := (x \mapsto J_x(t)): N_{tc} \rightarrow N_{tc}$$

(bis auf Parallelverschiebung) beschrieben werden, das der Tensorgleichung 1.Ordnung

$$(4) \quad Y' = \nabla V \cdot Y \quad \text{oder} \quad Y' Y^{-1} = \nabla V$$

genügt. Die Lösungen von (4) unterscheiden sich nur durch einen konstanten Tensor voneinander, da sie alle denselben Raum von Jacobifeldern aufspannen; sie heißen Flußtensoren der Kongruenz k .

Wenn die Geodätische c mit dem Jacobitensor Y längs c also in dieser Weise in eine passende Kongruenz eingebettet ist, so mißt der Tensor $Y' Y^{-1}$ gerade die Änderung des Flußvektors vertikal zur Flußrichtung. Eine solche Einbettung ist immer möglich: Es sei eine beliebige Geodätische $c: I \rightarrow M$ und ein nicht singuläres Jacobitensorfeld Y längs c vorgegeben, $c'(0) = v \in SM$. Zu Y gehört die injektive lineare Abbildung $f_Y: N_{0c} \rightarrow T_v SM$ (121). Sei X eine Untermannigfaltigkeit der Dimension n von SM durch den Punkt $v \in SM$ mit $T_v X = \text{Bild } f_Y$; X sei transversal zum Fluß und zum vertikalen Bündel \mathcal{V} . Dies ist möglich in einer kleinen Umgebung von v , denn $\text{Bild } f_Y$ ist senkrecht zum Geodätischen Fluß und, weil Y nicht singulär ist, transversal zu \mathcal{V} .

Dann definieren wir die Kongruenz

$$k = ((x, t) \mapsto \tau \phi_t x) : X \times I \longrightarrow M.$$

Die zu k "passenden" Jacobifelder senkrecht zu c kommen von Feldern $\phi_{t*} w$ her mit $w \in T_v X = \text{Bild } f_Y$. Also werden sie durch den Tensor Y beschrieben, und Y erfüllt mit den entsprechenden Bezeichnungen die Gleichung (4).

Die Gleichung $L_Y(Yx) = 0$ für alle $x \in N_{0c}$ gibt die Beziehung zwischen Y und dem Fluß φ_t des Vektorfeldes V , der für alle $s, t, s+t \in I$ definiert ist durch $\varphi_t(k(p, s)) = k(p, s+t)$. Es gilt dann nämlich $Y(s+t)x = \varphi_{s*} Y(t)x$, und also bis auf Parallelversch.

$$\varphi_{s*}|_{N_{tc}} = Y(t+s) Y(s)^{-1}.$$

14.2. Im Folgenden wollen wir die Lagrange-Tensoren geometrisch charakterisieren.

Def.: Sei $N \subset M$ eine C^2 -Untermannigfaltigkeit, V ein orthogonales Einheitsvektorfeld auf N . Der II. Fundamentaltensor A_V von N bezüglich V ist als Normalanteil der kovarianten Ableitung längs N definiert: A_V ist der $\binom{1}{1}$ -Tensor auf N mit

$$\langle A_V X, Y \rangle := \langle \nabla_X Y, V \rangle$$

für Tangentialvektorfelder X, Y von N .

Weil $\nabla_X Y = \nabla_Y X + [X, Y]$ und $[X, Y] \in TN \perp V$, ist

$\langle A_V X, Y \rangle = \langle X, A_V Y \rangle$, d.h. A_V ist symmetrisch.

Für orientierte Hyperflächen N ist das Einheitsnormalenfeld V eindeutig bestimmt; wir sprechen einfach von dem II. Fundamentaltensor A_N von N .

Theorem 1 Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $c: I \rightarrow M$ eine Geodätische mit Anfangsvektor $c'(0) = v \in S_p M$. Sei Y regulärer Jacobitensor längs c . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) Y ist Lagrange-Tensor.

(ii) Bild f_Y ist Lagrange-Unterraum von $T_v^* M$.

- (iii) $Y'Y^{-1}$ ist symmetrisch
- (iv) Y ist Flußtensor einer Kongruenz $k: N \times I \rightarrow M$ von Geodätischen um c so, daß das Vektorfeld $V = k_*\left(\frac{d}{dt}\right)$ rotationsfrei ist.
- (v) Y ist Flußtensor einer Kongruenz $k: N \times I \rightarrow M$ mit folgender Eigenschaft: Die Geodätischen $c_n(t) := k(n, t)$ für $n \in N$ sind die orthogonalen Trajektorien der "parallelen" Hyperflächen $N_t := k(N \times \{t\})$ ("orthogonale Kongruenz"). Mit $V = k_*\left(\frac{d}{dt}\right)$ gilt weiterhin für die II. Fundamentaltensoren dieser Hyperflächen:

$$A_{N_t} = -\nabla V|_{N_t},$$

insbesondere

$$A_{N_t}(c(t)) = -Y'(t)Y^{-1}(t).$$

Bew.: (i), (ii) und (iii) sind nach Definition eines Lagrange-Tensors äquivalent. (v) ist ein Spezialfall von (iv), denn die Bedingung

$$0 = (\operatorname{rot} V)_{ij} = \nabla_i V_j - \nabla_j V_i$$

in beliebigen Koordinaten ist gerade äquivalent zur Symmetrie von ∇V . Diese ist aber in (v) gewährleistet, weil A_{N_t} symmetrisch ist. Wegen

$$(4) \quad \nabla V = Y'Y^{-1} \quad \text{längs } c$$

folgt aus der Rotationsfreiheit von V die Symmetrie von $Y'Y^{-1}$ und damit (iii) aus (iv). Es bleibt (v) aus (i) zu zeigen.

Sei dazu N eine Hyperfläche durch p , auf der der Vektor v senkrecht steht, mit II. Fundamentaltensor $A_N(p) = -Y'(0)Y^{-1}(0)$ an diesem Punkt p . v bestimmt eine Orientierung von N um p und damit ein Einheitsnormalvektorfeld V auf N . Sei $c_n := c_V(n)$ die zu N orthogonale Geodätische durch n , die "Normale" durch n . Dann definieren wir die Kongruenz der Normalen

$$k := ((n, t) \mapsto c_n(t)) : N \times I \rightarrow M.$$

V läßt sich auf ganz Bild k ausdehnen: $V := k_*(\frac{d}{dt})$.

Wir zeigen $V \perp k_*TN$ überall auf Bild k . Sei dazu ξ ein Tangentialvektorfeld auf N , X das Vektorfeld auf Bild k $X := k_*(\xi)$. Dann ist X V -invariant ($[X, V] = 0$), also

$$\frac{d}{dt} \langle V, X \rangle = \langle V, \nabla_V X \rangle = \langle V, \nabla_X V \rangle = \frac{1}{2} X \langle V, V \rangle = 0,$$

denn $\|V\|^2$ ist konstant gleich 1. Außerdem ist nach Konstruktion $\langle V, X \rangle_{t=0} = 0$, weil V Normalvektorfeld von N ist, somit gilt überall auf Bild k $\langle V, X \rangle = 0$ und $V|_{N_t}$ ist Normalvektorfeld der Hyperfläche N_t für alle $t \in I$.

Für die II. Fundamentalform erhalten wir

$$\langle A_{N_t} X, Y \rangle = \langle V, \nabla_X Y \rangle = - \langle \nabla_X V, Y \rangle$$

für Tangentialvektorfelder X und Y von N_t , also

$$A_{N_t} = - \nabla V|_{N_t}$$

und längs c wegen (4):

$$A_{N_t}(c(t)) = - Y'(t) Y^{-1}(t),$$

womit (v) und also der Satz bewiesen ist. \square

143. Erinnern wir uns an 121 zurück, so können wir als Konsequenz des Theorems folgendes festhalten: Sei Y eine Lagrange-Lösung längs der Geodätischen $c = c_Y: I \rightarrow M$. Sei $f = f_Y: N_0 c \rightarrow T'_V SM$ der zu Y gehörige Monomorphismus. Dann gibt es eine Untermannigfaltigkeit $X^n \subset SM$ durch v tangential an den Unterraum Bild f so, daß

$$TX \subset T'SM.$$

Das Differential der orthogonalen Kongruenz

$$k = ((x, t) \mapsto r \phi_t x) : X \times I \rightarrow M$$

ist bei v gegeben durch die Ableitungen der $k_t: X \rightarrow M$, $k_t(p) = k(p, t)$:

$$k_{t*}(v) = Y(t) \cdot f^{-1}$$

bis auf Parallelverschiebung längs c . Die Existenz von X ist durch das Theorem gesichert: Ist $Y(t_0)$ regulär für $t_0 \in I$, so nehme man die Normalvektoren der Hyperfläche N_{t_0} und transportiere sie mit $\phi_{t_0}^{-1}$. Weiterhin können wir Flußabbildungen definieren:

$$k_{st} := k_{s+t} k_s^{-1} : N_s \longrightarrow N_{s+t} ;$$

sie beschreiben, wie der Fluß der Kongruenz N_s nach N_{s+t} transportiert. Deren Differential ist längs c gegeben durch

$$k_{st*} = Y(s+t) Y(s)^{-1} .$$

Geht man umgekehrt von einer Hyperfläche $H \subset M$ mit Einheitsnormalvektorfeld V aus, dann kann man wie im Beweis des Theorems für ein geeignetes Intervall I eine Kongruenz

$$k(h, t) := c_{V(h)}(t) , \quad k: H \times I \longrightarrow M$$

definieren. Wir wollen sie die Normalenkongruenz der Hyperfläche H nennen. Das Differential k_* kann am einfachsten durch das ausgezeichnete Flußtensorfeld $Y_{V(h)}$ mit dem Anfangswert $Y_{V(h)}(0) = 1$ für alle $h \in H$ beschrieben werden. In diesem Fall ist

$$A_H(h) = Y_{V(h)}'(0)$$

und

$$k_{t*}(h) = Y_{V(h)}(t)$$

für alle $h \in H$.

Def.: Eine Singularität dieses Tensorfeldes Y heißt ein Fokuspunkt der Hyperfläche H .

In einem Fokuspunkt werden die senkrecht von der Hyperfläche ausgehenden Strahlen fokussiert. Ist c eine Normale von H (d.h. $c'(0) = V(h)$), wo $h = c(0) \in H$ und $c(f)$ der erste Fokuspunkt auf c , so ist c lokal Kürzeste von H nach $c(s)$ für alle $s < f$. Denn auf $U := \text{Bild } k$ liefert die Normalenkongruenz eine "Karte"

$$(x_1, x_2) := k^{-1}: U \longrightarrow H \times I .$$

Ist $b = (b_1, b_2) : J \rightarrow U$ eine weitere Verbindungskurve von H nach $c(s)$, so ist deren Länge nicht kleiner als s :

$$\begin{aligned} L(b) &= \int_J \|b'(t)\| dt = \int_J (\|b_1'(t)\|^2 + \|b_2'(t)\|^2)^{1/2} dt \\ &\geq \int_J \|b_2'(t)\| dt \geq s , \end{aligned}$$

weil die Komponenten $b_1'(t)$ und $b_2'(t)$ von $b'(t)$ aufeinander senkrecht stehen.

144. Die in 143 beschriebene Zuordnung von n -Untermannigfaltigkeiten von SM und Lagrange-Tensoren läßt die Frage aufkommen, ob ein gegebenes Lagrange-Tensorfeld $Y_v(t)$, das für jedes $v \in SM$ definiert ist mit einer C^k -Abhängigkeit von v , $k \geq 0$, vielleicht von einem einheitlichen n -Flächensystem in SM herkommt, also von einer Blätterung.

Def.: Sei U^m eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine (i.a. nicht zusammenhängende) C^k -Untermannigfaltigkeit ($k \geq 0$)

B^1 , $0 \leq 1 \leq m$, heißt Blätterung von U , wenn

(i) $U = B$ als Mengen,

(ii) um jeden Punkt $p \in U$ gibt es eine offene Umgebung $U'(p)$ und eine Karte $x : U' \rightarrow R^m$, so daß

$x(U') = V \times W$ für offene Mengen $V \subset R^1$, $W \subset R^{m-1}$ und

$x^{-1}(V \times \{q\})$ offen in B für alle $q \in W$.

Jede Zusammenhangskomponente von B heißt Blatt von B ; B ist die disjunkte Vereinigung seiner Blätter (i.a. nicht parakompakt).

Triviale Blätterungen sind $B = U$ als Mannigfaltigkeiten ($1 = m$) und $B = U$ mit der diskreten Topologie ($1 = 0$). Jedes Produkt $U = R \times S$ hat zwei zueinander transversale (im Fall $k \geq 1$) Blätterungen $B_1 := \coprod_{r \in R} (\{r\} \times S)$ und $B_2 := \coprod_{s \in S} (R \times \{s\})$. Die Bedingung (ii) sagt gerade, daß jede Blätterung lokal von dieser Form ist.

Eine Blätterung B liefert eine Distribution TB auf U , d.i. ein Unterbündel von TU . Die Frage ist, wann umgekehrt eine Distribution von einer Blätterung herkommt. Ein Blatt einer solchen Blätterung nennt man Integralmannigfaltigkeit der Distribution; das Ganze wäre eine Integralblätterung.

Ist nun ein Jacobitensorfeld Y_v für alle $v \in SM$ gegeben, so wollen wir fragen, ob die zugehörige Distribution

$(\text{Bild } f_Y)_v = \{ (Y_v(0)x, Y'_v(0)x) \mid x \in T_{\pi v} M, x \perp v \} \subset T'_v SM$
 $(v \in SM)$ eine Integralblätterung besitzt. Solche Jacobitensorfelder wollen wir integrierbar nennen. Ist $X^n \subset SM$ eine Integralmannigfaltigkeit von Y und $v \in X$ mit Fußpunkt $\pi v = p$, so ist v Normalvektor auf $\pi X \subset M$, denn

$$(*) \quad \pi_* T_v X = \pi_*(\text{Bild } f_Y) = \{ Y_v(0)x \mid x \in T_p M, x \perp v \} \perp v.$$

Ist also X eine Integralmannigfaltigkeit von Y und $v \in X$, so kann X beschrieben werden als die Zusammenhangskomponente von v des Einheitsnormalenbündels von πX , $N(\pi X) \cap SM$. Das bleibt aus Dimensionsgründen auch dann richtig, wenn $\pi|_X$ nicht von maximalem Rang ist, wenn also $Y_v(0)$ singulär wird, denn die Einheitsnormalvektoren von πX bilden in jedem Fall eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit von SM , die wegen $(*)$ mit X übereinstimmen muß. Ebenso ist die Distribution

$$(\text{Bild } \phi_{t*} \circ f_Y)_v = \{ (Y_v(t)x, Y'_v(t)x) \mid x \perp c'_v(t) \}$$

integrierbar mit Integralmannigfaltigkeit $X_t := \phi_t X =$ Zusammenhangskomponente von $\phi_t v$ von $N(\pi X_t) \subset SM$. Weil der entartete Fall $(\text{Bild } \phi_{t*} \circ f_Y)_v \wedge \nabla_v \neq 0$ nur für isolierte t -Werte auftritt (123), haben wir bewiesen:

Satz: Eine n -Untermannigfaltigkeit X von SM ist genau dann Integralmannigfaltigkeit des Jacobitensorfeldes Y , wenn für alle $v \in SM$ und für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \text{Sing } Y_v$ eine Umgebung $U(v)$ in SM existiert derart, daß $\pi \phi_t(X \cap U)$ reguläre Hyperfläche in M und $Y|_{X \cap U \times I}$ für ein geeignetes Intervall I Flußtensorfeld der zugehörigen Normalenkongruenz ist. \square

Beispiele integrierbarer Jacobitensorfelder sind A und D_s , sofern das letztere für alle $v \in SM$ definiert ist: $\text{Bild } f_A = \nabla'$ mit den Fasern $S_{\pi v} M$ als Integralmannigfaltigkeiten. D_{sv} ist nach Definition Flußtensorfeld der Normalenkongruenz der Riemannschen Sphäre S_{sv} vom Radius s mit Mittelpunkt $c_v(s)$. Nach dem obigen Satz bilden

die nach innen gerichteten Normalenvektoren der S_{sv} eine Integralmannigfaltigkeit von D_g .

Natürlich sind nicht alle Lagrange-Tensorfelder integrierbar. Eine Integralmannigfaltigkeit etwa des Jacobitensorfeldes B mit den Anfangswerten $B(0) = 1$, $B'(0) = 0$ wäre ein paralleles Einheitsnormalvektorfeld einer Hyperfläche; eine solche Hyperfläche müßte demnach total geodätisch sein. In § 3.4 werden wir der Frage nachgehen, wann die in 132 definierte asymptotische Lösung D integrierbar ist.

1.5 II. Fundamentaltensor und Abstandsfunktion einer Hyperfläche

151. Im vorigen Abschnitt sahen wir die Bedeutung der II. Fundamentaltensoren von Hyperflächen für die Jacobitensoren. Wir wollen in diesem Paragraphen auf die geometrische Bedeutung des II. Fundamentaltensors mit Blick auf die Abstandsfunktion einer Hyperfläche eingehen. Wir werden diese Überlegungen in Kapitel 3 und 4 brauchen.

Wir möchten also die Abstandsfunktion einer Hyperfläche H

$$a : M \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad , \quad a(p) := d(p, H)$$

beschreiben. Die ersten und zweiten Ableitungen einer Funktion sind durch Gradient und Hessischen Tensor gegeben.

Def.: Sei U eine Riemannsche C^2 -Mannigfaltigkeit, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^2 -Funktion. Der Gradient von f ist das Vektorfeld $\text{grad } f$ auf U mit

$$\langle \text{grad } f, X \rangle := f_* X = Xf$$

für jedes Vektorfeld X auf U . Der Hessesche Tensor von f ist das $\binom{1}{1}$ -Tensorfeld

$$f_{**} := \nabla \text{grad } f \quad .$$

Dabei gilt für Vektorfelder X, Y auf U :

$$\begin{aligned}\langle f_{**}X, Y \rangle &= \langle \nabla_X \text{grad } f, Y \rangle = X \langle \text{grad } f, Y \rangle - \langle \text{grad } f, \nabla_X Y \rangle \\ &= XYf - (\nabla_Y X)f.\end{aligned}$$

Die letzte Formulierung zeigt drei Dinge:

1. f_{**} ist symmetrisch, denn wegen der Torsionsfreiheit ist

$$XY - \nabla_X Y = YX - \nabla_Y X.$$

2. Ist Z Tangentialvektorfeld einer Geodätischen $b(t)$ auf U , so ist

$$\langle f_{**}Z, Z \rangle = ZZf = (f \circ b)''.$$

3. Ist $f_*(p) = 0$ (p kritischer Punkt), so ist für Vektorfelder X, Y

$$\langle f_{**}X, Y \rangle(p) = XYf = YXf.$$

152. Sei nun H eine C^1 -Hyperfläche mit einem C^1 -differenzierbaren Einheitsnormalvektorfeld $v(h)$. Sei wieder $k : H \times I \rightarrow M$, $k(h, t) = c_{v(h)}(t)$ die Normalenkongruenz, $V(h, t) := k_*(\frac{d}{dt})$. V ist Lösung der Differentialgleichung $V' = 0$; die Lösungskurven $t \mapsto V(h, t)$ hängen differenzierbar von den Anfangswerten $V(h, 0) = v(h)$ ab, daher ist V ein C^1 -Vektorfeld auf Bild k . Auf $U := (\text{Bild } k) \setminus H$ sei N das nach außen gerichtete Normalenfeld:

$$N(h, t) := \begin{cases} V(h, t) & \text{für } t > 0 \\ -V(h, t) & \text{für } t < 0 \end{cases}, \quad h \in H.$$

Ist $a : U \rightarrow \mathbb{R}$ die oben definierte Abstandsfunktion von H , so können wir a längs einer beliebigen Kurve $b(s)$ in U mit Anfangsvektor $\frac{d}{ds} b(0) = z$ ableiten. Sei nämlich $g_s : [0, 1] \rightarrow M$ mit $g_s(0) = b(s)$, $g_s(1) \in H$ die kürzeste Verbindung von $b(s)$ nach H ; diese ist in U eindeutig bestimmt. Diese Geodätischen bilden eine Variation $g : J \times [0, 1] \rightarrow M$, $g(s, u) = g_s(u)$ mit Variationsvektorfeldern $Z := g_*(\frac{\partial}{\partial s})$ und $W := g_*(\frac{\partial}{\partial u})$. Da g_s kürzeste nach H ist für alle $s \in J$, steht sie senkrecht auf H und ist daher mit der Normalen $c_{v(h)}$, $h := g_s(1)$ bis auf Parametrisierung identisch. Deren Tangentialvektor ist N , es gilt also

$$W(s, u) = - \|W(s, u)\| \cdot N(g(s, u)),$$

denn W ist auf H gerichtet, N weg von H . Nun ist

$$a(s) := a(b(s)) = \int_0^1 W(s, u) du$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \|W\| &= \frac{\langle \nabla_Z W, W \rangle}{\|W\|} = \frac{\langle \nabla_W Z, W \rangle}{\|W\|} = - \langle \nabla_W Z, N \rangle = - \frac{d}{du} \langle Z, N \rangle + \|W\| \langle Z, \nabla_N N \rangle \\ &= - \frac{d}{du} \langle Z, N \rangle. \end{aligned}$$

Damit ist $a(s)$ C^1 -differenzierbar:

$$\frac{d}{ds} a(s) = - \int_0^1 \frac{d}{du} \langle Z, N \rangle_{s,u} du = \langle Z, N \rangle_{s,0},$$

denn bei $u=1$ ist Z tangential zu H und damit senkrecht zu N .

Allgemein gilt für alle Vektorfelder Z auf U :

$$Za = a_* Z = \langle Z, N \rangle.$$

Wir haben bewiesen:

Satz: Sei H eine C^1 -Hyperfläche mit C^1 -Normalvektorfeld. Sei R der Regularitätsbereich von $\exp|_{NH}$, der Exponentialfunktion des Normalenbündels von H . Sei $U = (\exp R) \setminus H$ und $a(p) = d(p, H)$ die Abstandsfunktion von H für $p \in U$.

Beh.: a ist auf U C^2 -differenzierbar mit

$$\text{grad } a = N \quad \text{und} \quad a_{**} = \nabla N,$$

wobei N das Tangentialfeld der nach außen gerichteten Normalen von H bezeichnet.

153. Unter den Voraussetzungen von 152 können wir statt der Abstandsfunktion a von H auch die Normalfunktion b der Hyperfläche betrachten. Diese ist auf $\text{Bild } k$, k die Normalenkongruenz, wie folgt definiert:

$$b \circ k(h, t) := \begin{cases} a \circ k(h, t) & \text{für } t \geq 0 \\ -a \circ k(h, t) & \text{für } t \leq 0 \end{cases}, \quad h \in H, \quad t \in I.$$

Man sieht aus 152, daß

$$\text{grad } b = V = k_* \left(\frac{d}{dt} \right)$$

überall auf $\text{Bild } k$, also ist b dort eine C^2 -Funktion. Damit können wir zeigen:

Satz: Eine C^1 -Hyperfläche H mit C^1 -Normalenfeld $v(h)$, $h \in H$ ist sogar eine C^2 -Hyperfläche.

Bew.: Für jeden Punkt $p \in H$ erklären wir eine C^2 -Karte x auf einer Umgebung $U(p)$ in M . Sei dazu $T = \exp T_p H$; T ist in einer Umgebung $T' = T \cap U'$ von p reguläre Hyperfläche. Sei $k : T' \times I \rightarrow M$ die Normalenkongruenz von T' . Wenn $q \in T'$ nahe genug bei p liegt, etwa $q \in T'' = T \cap U''$, schneidet die Geodätische $k_q(t) := k(q, t)$ die Hyperfläche H und alle Parallelflächen H_t , die sie trifft, transversal. Sei R wie in 152 der Regularitätsbereich von $\exp|_{NH}$. Dann setzen wir $U := k(T'' \times I) \cap \exp R$ und definieren

$$x_1 = U \xrightarrow{(k^{-1})_1} T'' \xrightarrow{\exp_p^{-1}} T_p H$$

$$x_2 = b : U \rightarrow R$$

x_1 ist C^∞ und x_2 ist C^2 , außerdem sind die Niveauflächen von x_1 und x_2 zueinander transversal, also ist

$$x := (x_1, x_2) : U \rightarrow T_p H \times R$$

eine C^2 -Karte von M , wobei

$$H \cap U = \{p \in U \mid x_2(p) = 0\};$$

somit ist H eine C^2 -Hyperfläche.

154. Seien nun H und G zwei disjunkte C^2 -Hyperflächen mit gemeinsamer Normale $c : I \rightarrow M$, einer geodätischen Strecke von $p \in H$ nach $q \in G$. H und G seien so nahe beieinander, daß G im Bild des Regularitätsbereiches von $\exp|_{NH}$ liegt. Wie verhält sich die Distanzfunktion $d = a|_G$ zu den II. Fundamentaltensoren der Hyperflächen?

Satz: $d : G \rightarrow \mathbb{R}_+$ ist eine C^2 -Funktion, die bei q stationär ist mit Hesseschem Tensor

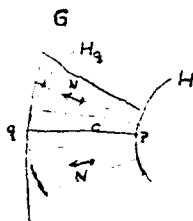
$$d_{**}(q) = (A_G - A_{H_q})(q),$$

wo H_q die zu H parallele Hyperfläche durch den Punkt q bezeichnet. Die II. Fundamentaltensoren sind dabei bezüglich des Tangentialvektors von c genommen, der Verbindungsstrecke, die von H nach G läuft.

Bew.: Nach den Ergebnissen von 152 ist grad d die Projektion von $N|_G$ auf TG . An der Stelle q gilt $\text{grad } d(q) = 0$, denn dort steht N senkrecht auf G . Für zwei beliebige Tangentialvektorfelder X und Y auf G gilt bei q nach 151:

$$\begin{aligned}\langle d, X, Y \rangle(q) &= XYd(q) = X\langle Y, N \rangle(q) \\ &= \langle \nabla_X Y, N \rangle + \langle Y, \nabla_X N \rangle(q) \\ &\stackrel{?}{=} \langle (A_G - A_{H_q})X, Y \rangle(q)\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung sieht man so ein: Weil $N(q)$ Normalvektor zu G , ist der erste Term des vorletzten Ausdrucks genau die



II. Fundamentalform der Hyperfläche G . Für den 2. Term gilt

$$\langle \nabla_X N, Y \rangle(q) = -\langle N, \nabla_X Y \rangle(q) + X\langle N, Y \rangle(q) \quad (§)$$

für jedes Vektorfeld Y mit $Y(q) = Y(q)$.

Insbesondere können wir für Y ein Tangentialvektorfeld der Parallelelfäche H_q zu H , d.i. eine Niveaufläche der Abstandsfunktion a von H wählen. Auf dieser steht N an jeder Stelle senkrecht; also entfällt der 2. Term der Gleichung (§) und es gilt

$$\langle \nabla_X N, Y \rangle(q) = -\langle A_{H_q} X, Y \rangle(q) ,$$

woraus die Behauptung folgt. \square

155. Wir können jetzt zeigen, was der II. Fundamentaltensor anschaulich bedeutet: Je größer A , desto mehr krümmt sich die Fläche:

Satz: Seien H und H' orientierte C^2 -Hyperflächen, die sich im Punkte $p \in M$ mit gemeinsamen Normalvektor berühren.

(i) Falls $A_{H'}(p) < A_H(p)$ (vgl. Anhang), so gibt es eine Umgebung $U(p)$ in M derart, daß $H' \cap U$ ganz auf der Seite des Normalenvektors von H liegt und mit H nur den einen Punkt p gemeinsam hat.

(ii) Liegt umgekehrt H' in einer Umgebung von p ganz auf der

Seite von H , die der Normalvektor weist, so gilt

$$A_H(p) \leq A_{H'}(p) .$$

Bew.: Sei H'' die um ein kleines Stück t in Richtung des Normalenvektors verschobene Paralleelfläche zu H' . H'' spielt jetzt die Rolle von H im vorigen Satz. Die Distanzfunktion d von H'' auf H ist bei p stationär mit Hesseschem Tensor

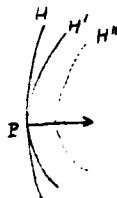
$$d_{**}(p) = - (A_H(p) - A_{H'}(p)) > 0 .$$

Das Minus-Zeichen tritt dabei deshalb auf,

weil jetzt der Normalvektor in die andere Richtung zeigt als im Satz davor, nämlich auf die Hyperfläche H'' zu. Die Distanzfunktion d hat also im Punkt p ein lokales striktes Minimum, d.h.

alle anderen Punkte einer gewissen Umgebung $U(p)$, die in H liegen, sind weiter von H'' entfernt als p . Da H' von H'' den konstanten Abstand t hat, bleibt H' wenigstens in U ganz auf der Seite von H , wo H'' liegt, und schneidet H in U nicht ein zweites Mal.

Hat umgekehrt d bei p ein lokales Minimum, so muß $d_{**} > 0$ gelten, und es folgt (ii).



1.6 Die Volumenexpansion einer Kongruenz

161. Sei jetzt wieder $Y(t)$ ein regulärer Jacobitensor längs einer Geodätischen $c: I \rightarrow M$. Wir sahen im Abschnitt 1.4, daß der Tensor $Y'Y^{-1}$ als Ableitung des Flußvektorfeldes, im Lagrange-Fall als II. Fundamentaltensor einer Hyperfläche gedeutet werden konnte. Dieser Tensor genügt einer kovarianten Differentialgleichung 1. Ordnung, die sich sofort aus der Jacobigleichung (1) ergibt:

Sei $Y'Y^{-1} =: U$, dann ist

$$U' = Y''Y^{-1} - Y'Y^{-1}Y'Y^{-1} = RYY^{-1} - U^2$$

also

$$(5) \quad U' + U^2 + R = 0 \quad .$$

Betten wir nun c und Y in eine Kongruenz ein, so können wir eine solche Darstellung physikalisch als Gasströmung deuten, mit den Geodätischen als Stromlinien. Analog zur Strömungslehre können wir den Tensor U in drei Anteile zerlegen: den antisymmetrischen Anteil $A := (1/2) \cdot (U - U^*)$ (Wirbeltensor), den Spur-Anteil $\frac{\Theta}{n} \cdot 1$, wobei $\Theta := \text{Spur } U$ (Volumenexpansion) und den spurfreien symmetrischen Teil $S := (1/2) \cdot (U + U^*) - \frac{\Theta}{n} \cdot 1$ (Scherungstensor). Der Spur-Anteil ist für uns der interessanteste, weil er das Wachstum der Jacobi-

$$\begin{aligned} \text{Sp } U' + \text{Sp } A^2 + \text{Sp } S^2 + \text{Sp } \frac{\Theta^2}{n^2} \cdot 1^2 + 2 \frac{\Theta}{n} \text{Sp } S \\ + 2 \frac{\Theta}{n} \text{Sp } A + 2 \text{Sp } AS + \text{Sp } R = 0 \end{aligned}$$

Die gemischten Glieder fallen alle heraus, weil $\text{Sp } A = \text{Sp } S = 0$

$$\text{und } \text{Sp } AS = \sum_{i,j} A_{ij} S_{ji} = \sum_{i,j} -A_{ji} S_{ij} = -\text{Sp } AS .$$

Der Krümmungsterm wird bei Spurbildung zur Riccikrümmung:

$$\text{Sp } R = \sum_i \langle R(x_i, c') c', x_i \rangle =: \text{Ric}(c', c')$$

x_1, \dots, x_n sei dabei eine beliebige Orthonormalbasis von $N_0 c$.

So erhalten wir die Gleichung von LANDAU und RAYCHAUDHURI:

$$(6) \quad \Theta' + \frac{1}{n} \Theta^2 + \text{Sp } A^2 + \text{Sp } S^2 + \text{Ric}(c', c') = 0$$

(vgl. [17], [26]).

162. Was hat die Spur von U mit Volumenexpansion zu tun? Sei dazu $k : N \times I \rightarrow M$ eine Kongruenz zu Y ; daß eine solche in jedem Fall existiert, wissen wir aus 141. $V = k_* \left(\frac{d}{dt} \right)$ bezeichne wie immer das zugehörige Flußvektorfeld. Dann ist

$$\Theta = \text{Sp } U = \text{Sp } \nabla V = \text{div } V .$$

Die Divergenz eines Vektorfeldes gibt aber gerade die Volumenänderung unter dem Fluß des betreffenden Vektorfeldes an: Sei ω die Volumenform auf M , $\eta := \iota_V \omega$ die auf $k_* T N$ induzierte n -Form, η_t der Fluß von V .

Dann gilt (vgl. z.B. [1])

$$(\operatorname{div} V)\gamma \wedge dt = (\operatorname{div} V)\omega = L_V \omega = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\varphi_s^* \gamma - \gamma}{s} \wedge dt.$$

Mit 141 erhalten wir (modulo Parallelverschiebung)

$$\begin{aligned} \Theta \gamma &= (\operatorname{div} V)\gamma = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (\varphi_s^* \gamma - \gamma) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [\det Y(t+s) - \det Y(t)] \det Y(t)^{-1} \cdot \gamma. \end{aligned}$$

Ergebnis:

$$(7) \quad \Theta = \operatorname{Sp} Y'Y^{-1} = (\det Y)' \cdot (\det Y)^{-1}.$$

Satz: Sei $c: I \rightarrow M$ eine Geodätische und Y ein Jacobitensor längs c . Genau dann verschwindet ein Jacobifeld der Form Yx , $x \neq 0$, $x \in N_{0,c}$, im Punkte $c(t_0)$, $t_0 \in I$, wenn

$$\Theta(t) := \operatorname{Sp} Y'Y^{-1}(t) \rightarrow -\infty \text{ für } t \rightarrow t_0.$$

Bew.: Da Y und damit $\det Y$ in einer Umgebung von t_0 C^∞ -Abbildungen sind, kann die Bedingung $(\det Y)'(\det Y)^{-1}(t) \rightarrow -\infty$ für $t \rightarrow t_0$ nur dann erfüllt werden, wenn $\det Y(t_0) = 0$. Umgekehrt fordert $\det Y(t_0) = 0$, daß $\Theta(t) < 0$ kurz vor t_0 , weil der Fluß einer zu Y gehörigen Kongruenz das Volumen (auf Null) zusammenzieht. Also gilt in diesem Fall $\Theta(t) \rightarrow -\infty$ für $t \rightarrow t_0$.

162. Sei Y wieder ein Jacobitensor längs der Geodätischen $c: I \rightarrow M$. Für $N_{0,c}$ sei eine Orthonormalbasis x_1, \dots, x_n gegeben. Das durch die Jacobifelder Yx_i zusammen mit c' an einer Stelle $t \in I$ aufgespannte Volumen wird gegeben durch

$$e(t) := \det Y(t)$$

Für dieses galt die Gleichung (7):

$$e' = \Theta \cdot e$$

mit $\Theta = \operatorname{Sp} Y'Y^{-1}$. Die Funktion

$$l(t) := e(t)^{1/n}$$

gibt so etwas wie die mittlere Länge der Jacobifelder an. Wir können sie mit Hilfe der Riccikrümmung abschätzen:

Satz: Sei Y ein Jacobitensor längs $c: I \rightarrow M$. Mit den vorstehenden Bezeichnungen gilt:

$$1'' = -\frac{1}{n} [\text{Sp } A^2 + \text{Sp } S^2 + \text{Ric}(V, V)] \cdot 1.$$

Ist Y sogar ein Lagrangetensor, gilt die folgende Ungleichung:

$$1'' \leq -\frac{1}{n} \text{Ric}(V, V) \cdot 1.$$

Bew.:

$$\begin{aligned} 1'' &= (e^{1/n})'' = \frac{1}{n} (e^{1/n} \cdot \frac{e'}{e})' = \frac{1}{n} (e^{1/n} \theta)' \\ &= \frac{1}{n} (\frac{1}{n} e^{1/n} \theta) \cdot \theta + e^{1/n} \theta' \\ &= -\frac{1}{n} [\text{Sp } A^2 + \text{Sp } S^2 + \text{Ric}(V, V)] \cdot 1. \end{aligned}$$

Die letzte Zeile ist eine Konsequenz der Gleichung (6). Die Abschätzung im Lagrange-Fall folgt, weil dort der antisymmetrische Anteil A verschwindet und S^2 positiv definit ist.

Die letzte Ungleichung wird zur Gleichung genau dann, wenn $S = 0$. Das bedeutet, daß Y ein Vielfaches der Identität ist, $Y = \frac{\theta}{n} \cdot 1$; die Jacobifelder Y_x sind also modulierte Parallelfelder. Notwendig $C \in R$ und hinreichend dazu ist eine Anfangsbedingung der Form $Y(0) = C \cdot 1$, und eine rotationssymmetrische Krümmung der Gestalt $R(t) = K(t) \cdot 1$ mit einer reellwertigen Funktion $K(t)$. Wenn auf einer Vergleichsmannigfaltigkeit kleinerer Riccikrümmung diese Situation vorliegt, erhalten wir Vergleichssätze für die Volumenexpansion entsprechender Lagrange-Tensoren. Das kann man beispielsweise bei positiver Riccikrümmung ausnutzen.

163. Die Volumenexpansion eines Lagrange-Tensors hat eine weitere geometrische Bedeutung:

Def.: Sei $H \subset M$ eine Hyperfläche, $p \in H$. Die mittlere Krümmung h ist als Spur des II. Fundamentaltensors definiert:

$$h(p) := \text{Sp } A_H(p).$$

Ist Y ein Flußtensorfeld der Normalenkongruenz k von H , so gilt:

$$h(p) = \text{Sp } Y_p'(0) Y_p^{-1}(0) = \theta_p(0)$$

Betrachten wir die Parallelfelder $H_t = k(H \times \{t\})$, so erfüllen

deren mittlere Krümmungen $h(t)$ im Punkte $k(p, t)$ die Gleichung (6).

Kor.: Sei $c: [0, \infty) \rightarrow M$ eine Geodätische und $\text{Ric}(c'(t), c'(t)) \geq 0$ für alle $t \geq 0$. Dann gilt:

(i) Ein Lagrange-Tensor Y längs c mit

$$Y(0) = 1, \quad \text{Sp } Y'(0) \leq -\epsilon < 0$$

besitzt eine Singularität t_0 im Abstand $0 < t_0 \leq \frac{n}{\epsilon}$.

(ii) Eine Hyperfläche H , $p \in H$, mit mittlerer Krümmung

$$h(p) \leq -\epsilon$$

besitzt einen Fokuspunkt im Abstand $\leq \frac{n}{\epsilon}$.

Bew.: Nach dem vorher Gesagten sind die Formulierungen (i) und (ii) äquivalent. Die Ungleichung in 162 wird bei nichtnegativer Ricciskrümmung einfach zu

$$l'' \leq 0,$$

solange $l = (\det Y)^{1/n}$ nicht negativ ist. Als Anfangsbedingungen haben wir:

$$l(0) = 1, \quad l'(0) = \frac{1}{n} l(0) \cdot \theta(0) \leq -\frac{\epsilon}{n}.$$

Die erste Nullstelle von l muß somit vor der Nullstelle der Geraden $l(t) = 1 - \frac{n}{\epsilon} t$ liegen. (vgl. [26]) \square

Das folgende Theorem wurde in [17] für kausale Geodätische in Lorentzmannigfaltigkeiten bewiesen. Im Riemannschen Fall läuft der Beweis ähnlich. Der dortige Beweis kann aber wesentlich vereinfacht werden.

Theorem 2 Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $c: \mathbb{R} \rightarrow M$ eine Geodätische. Falls

$$R(0) \neq 0 \quad \text{und} \quad \text{Ric}(t) := \text{Ric}(c'(t), c'(t)) \geq 0$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, gibt es zueinander konjugierte Punkte $c(t_1)$ und $c(t_2)$.

Insbesondere gilt: Eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit von nichtnegativer Ricciskrümmung ist flach genau dann, wenn es auf ihr keine konjugierten Punkte gibt.

Bew.: Wir betrachten die folgenden Mengen von Lagrange-Tensoren längs c :

$$L_+ := \{Y \mid Y(0) = 1, \operatorname{Sp} Y'(0) \geq 0\},$$

$$L_- := \{Y \mid Y(0) = 1, \operatorname{Sp} Y'(0) \leq 0\}.$$

Wir wollen zunächst zeigen, daß alle Jacobitensoren in L_+ negative, alle in L_- positive Singularitäten besitzen. Sei dazu $Y \in L_-$ mit den üblichen Bezeichnungen $l = (\det Y)^{1/n}$, $U = Y'Y^{-1}$, $\theta = \operatorname{Sp} U$, $S = U - \frac{\theta}{n} \cdot 1$. Zwei Fälle sind zu unterscheiden: Entweder ist $\operatorname{Sp} S^2(t) = 0$ für alle $t \geq 0$. Dann ist $S(t) = 0$ und R von der Form $R(t) = K(t) \cdot 1$ mit $K(t) \in \mathbb{R}$ für alle $t \geq 0$, wie wir am Ende von 162 bemerkten. Weil nach Voraussetzung $R(0) \neq 0$ und $\operatorname{Ric}(0) > 0$, ist $K(0) > 0$. Für l gelten dann die folgenden Ungleichungen:

$$l'(0) = \frac{\theta(0)}{n} < 0, \quad l''(0) < 0, \quad l''(t) \leq 0$$

für alle $t \geq 0$ (vgl. 162.). Eine solche Funktion besitzt eine positive Nullstelle. Oder aber es gibt ein $s \geq 0$ mit $\operatorname{Sp} S^2(s) > 0$. In diesem Fall gilt:

$$l'(0) = 0, \quad l''(s) < 0, \quad l''(t) \leq 0$$

für alle $t \geq 0$, und auch in diesem Fall besitzt l eine positive Nullstelle. Das Entsprechende gilt für L_+ mit umgekehrtem Vorzeichen, so daß unsere Zwischenbehauptung bewiesen ist.

Wir nehmen nun an, daß es auf $c|_{[t_1, \infty)}$ keine konjugierten Punkte gibt, denn anderenfalls wären wir fertig. Dann ist laut 132 die Asymptotische Lösung D definiert und ohne Singularitäten auf $[0, \infty)$. Weil somit D nicht zu L_- gehört, obwohl $D(0) = 1$ richtig ist, muß $\operatorname{Sp} D'(0) > 0$ gelten. Ebenso muß $\operatorname{Sp} D'_s(0) \geq 0$ für genügend große s richtig sein, denn die D_s streben ja gegen D . Also liegt auch D_s in L_+ und hat nach dem Vorigen eine negative Singularität t_1 . So sind t_1 und $t_2 := s$ längs c zueinander konjugiert. \square

2. Infinitesimale Divergenz

2.1 Abschätzungen von Lagrange-Tensoren

211. Im folgenden Abschnitt wollen wir die Jacobifelder selber abschätzen, nicht nur die von ihnen aufgespannten Volumina. Im Vordergrund wird daher die Riccatigleichung (5) stehen, nicht mehr wie im letzten Abschnitt ihre Spurform (6).

Satz: Sei $c : I \rightarrow M$ Geodätische und U eine überall in I definierte und stetige symmetrische Lösung von

$$(5) \quad U' + U^2 + R = 0 \quad .$$

Sei $x \in N_{0,c}$ und

$$R(t)x = K(c'(t), x) \geq k(t) \quad .$$

Sei f eine Lösung von

$$(5') \quad f' + f^2 + k = 0$$

mit der Anfangsabschätzung

$$\langle U(0)x, x \rangle \leq f(0)$$

Beh.: $\langle U(t)x, x \rangle < f(t)$ für alle $t > 0$, $t \in I$.

Bew.: (vgl. auch [6]) Wir betrachten die Lösung $V(t) = f(t) \cdot 1$ der Differentialgleichung von Tensoren längs c

$$V' + V^2 + k \cdot 1 = 0 \quad .$$

Die Differenzfunktion sei

$$\begin{aligned} g(t) &= \langle U(t) - V(t)x, x \rangle ; \\ g' &= - \langle U^2 - V^2 \rangle_{x,x} - \langle (R - k \cdot 1)x, x \rangle \\ &< - \langle U^2 - V^2 \rangle_{x,x} \end{aligned}$$

Wir wissen, daß $g(0) < 0$ ist. Sei $s \in I$ ein Punkt mit

$$g(s) = 0 \quad .$$

Es ist $g'(s)$ zu untersuchen. Weil U und V symmetrisch sind, ist

$$\|Ux - x\|^2 = \langle U^2 x, x \rangle - 2\langle Ux, x \rangle + \|x\|^2,$$

$$\|Vx - x\|^2 = \langle V^2 x, x \rangle - 2\langle Vx, x \rangle + \|x\|^2.$$

Bilden wir die Differenz an der Stelle s , bleiben rechts nur die ersten Terme stehen:

$$\|U(s)x - x\|^2 - \|V(s)x - x\|^2 = \langle (U^2 - V^2)(s)x, x \rangle < -g'(s).$$

Die rechte Seite wird jetzt abgeschätzt, indem wir die Vektoren links durch ihre Projektion auf die x -Richtung ersetzen. Der erste Vektor verkürzt sich dabei:

$$\|Ux - x\|^2 \geq (\langle Ux, \frac{x}{\|x\|} \rangle - \langle x, \frac{x}{\|x\|} \rangle)^2,$$

während der zweite Vektor ungeändert bleibt:

$$\|Vx - x\|^2 = (\langle Vx, \frac{x}{\|x\|} \rangle - \langle x, \frac{x}{\|x\|} \rangle)^2,$$

denn V bewirkt nur eine Streckung. An dieser Stelle benötigen wir also, daß die "Vergleichskrümmung" $k-1$ richtungsunabhängig ist. Die Differenz der rechten Seiten verschwindet an der Stelle s , die Differenz der linken Seiten ist dort also nicht negativ. Insgesamt erhalten wir:

$$g'(s) < 0$$

Das ist natürlich nicht möglich, wenn $0 < s \leq I$ ist, denn es war $g(0) \leq 0$. Es gibt also keine Nullstelle $s > 0$ in I , und g ist in diesem Bereich strikt negativ, woraus die Behauptung folgt.

212. Wir gewinnen aus dem vorstehenden Satz einen Vergleichssatz für Jacobifelder mit beliebigen Anfangswerten, indem wir das Jacobifeld zu einem Lagrange-Tensor erweitern:

Satz: Sei $c: I \rightarrow M$ eine Geodätische ohne konjugierte Punkte, $I = [0, a]$. Sei J ein orthogonales Jacobifeld längs c mit Anfangswert $J(0) \neq 0$. Die Funktion $k: I \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine (differenzierbare) untere Krümmungsschranke: $R(t) > k(t) \cdot 1$. Sei $j: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der Gleichung

$$j'' + kj = 0$$

mit Anfangswerten

$$j(0) = \|J(0)\|, \quad j'(0) = \|J(0)\|'.$$

Beh.: Es gibt ein Intervall $[0, s] \subset I$, so daß gilt

$$\|J(t)\| < j(t) \quad \text{für } 0 < t \leq s,$$

wofern nämlich s der Bedingung

$$(\S) \quad D'_s(0) < \frac{\|J\|'}{\|J\|}(0) \cdot 1$$

(vgl. 131) genügt.

Bew.: Auf N_{0c} gibt es einen symmetrischen $\binom{1}{1}$ -Tensor S mit folgenden Eigenschaften:

$$D'_s(0) < S \leq j'j^{-1}(0) \cdot 1, \quad S \cdot J(0) = J'(0),$$

wobei s der technischen Bedingung (§) genügen soll. Wir definieren den Jacobitensor Y durch die Anfangswerte

$$Y(0) = 1, \quad Y'(0) = S.$$

Y ist ein Lagrange-Tensor, denn $U := Y'Y^{-1}$ ist symmetrisch, und modulo Parallelverschiebung gilt:

$$J(t) = Y(t)J(0).$$

Außerdem ist Y im Intervall $[0, s]$ nirgends singular. Denn Y ist Flußtensor der Normalenkongruenz einer Hyperfläche H durch den Punkt $c(0)$ mit $A_H(c(0)) = S > D'_s(0)$. Nach Satz 155 liegt H in einer Umgebung von $c(0)$ nicht im Inneren des Balles $B_s(c(s))$. Kein Punkt auf $c([0, s])$ ist daher Fokuspunkt von H und damit Singularität von Y (vgl. 143).

Mit der Anfangsbedingung

$$U(0) = S \leq j'j^{-1}(0) \cdot 1$$

sind alle Voraussetzungen von 211 erfüllt. Es gilt also:

$$U(t) < j'j^{-1}(t) \cdot 1 \quad \text{für } 0 < t \leq s.$$

Insbesondere erhalten wir wegen $J' = UJ$

$$\frac{\|J\|'}{\|J\|} = \left\langle U \frac{J}{\|J\|}, \frac{J}{\|J\|} \right\rangle < j'j^{-1}$$

im Intervall $(0, s]$. Anders ausgedrückt:

$$(\|J\| - j)' < j'j^{-1}(\|J\| - j).$$

Besäße diese Differenzfunktion $d := \|J\| - j$ eine Nullstelle $t_0 > 0$, so wäre dort $d'(t_0) > 0$, aber wie in 211 ist dies unmöglich, weil $d(t) > 0$ für kleine, positive t . Also ist d überall in $(0, \infty]$ strikt positiv, und die Behauptung folgt. \square

213. Sei im Folgenden $c : \mathbb{R} \rightarrow M$ eine Geodätische, und die Schnittkrümmung sei längs c durch eine Konstante beschränkt, genauer:

$$R(t) > k \cdot 1 = -r^2 \cdot 1 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

mit einer positiven Konstante r . Mit diesem konstanten k ist für alle $s \in \mathbb{R}$ und alle positiven $t \neq s$ die Funktion

$$f_s(t) := r \cdot \coth(r(t-s))$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$(5') \quad f' + f^2 + k = 0,$$

nämlich die Lösung, die zu den an der Stelle s verschwindenden Jacobifeldern im Standardraum konstanter negativer Krümmung $k = -r^2$ gehört.

Lemma: (EBERLEIN, [6]) Sei $U(t)$ für $t > 0$ eine symmetrische Lösung der Riccatigleichung

$$(5) \quad U' + U^2 + R = 0$$

längs c . Dann gilt für alle $t > 0$:

$$-r \cdot 1 \leq U(t) \leq r \coth(rt) \cdot 1.$$

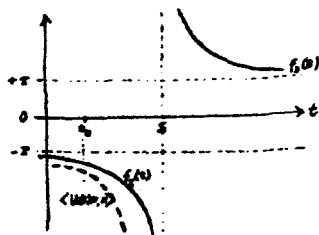
Bew.: Sei $U = Y \cdot Y^{-1}$ für einen Lagrange-Tensor Y längs c . So ein Y existiert sicherlich; z.B. setzen wir $Y(0) = 1$, $Y'(0) = U(0)$. Wäre nun für irgend ein $t_0 > 0$ und ein $x \in N_{t_0} c$

$$\langle U(t_0)x, x \rangle < -r,$$

so könnten wir ein genügend großes $s > t_0$ finden mit

$$\langle U(t_0)x, x \rangle < f_s(t_0);$$

nach 211 läge $\langle U(t_0)x, x \rangle$ unter



dem absteigenden Zweig der Funktion f_s , die bei s eine Polstelle hat. Dann hätte $\langle Ux, x \rangle$ im Intervall $(0, s]$ eine Polstelle, was nicht möglich ist. So ist die erste Ungleichung bewiesen. Die zweite folgt, weil es zu jedem $t_0 > 0$ ein $s \in (0, t_0)$ gibt, so daß

$$\langle U(t)x, x \rangle < f_s(t) \quad \text{für alle } t > t_0, \quad x \in N_t c.$$

Also

$$\langle U(t)x, x \rangle \leq \inf f_s(t) = f_0(t).$$

Folgerung: Sei $c : (a, \infty) \rightarrow M$ Geodätische. Für jeden nirgends singulären Lagrange-Tensor Y längs c gilt dann

$$\|Y'(t)x\| \leq r \cdot \coth(r(t-s)) \cdot \|Y(t)x\|$$

für alle $x \in N_0 c$ und $s \geq a$, $t > s$.

Ist insbesondere $a = -\infty$, d.h. Y nirgends singulär auf $c : \mathbb{R} \rightarrow M$, so gilt für alle $x \in N_0 c$:

$$\|Y'(t)x\| \leq r \|Y(t)x\| \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Bew.: Wegen

$$\|Y'x\| \leq \|Y'Y^{-1}\| \|Yx\|$$

folgen die Behauptungen aus der oberen und unteren Abschätzung des Lemmas, denn im Bereich $t > s$ ist $f_s(t) > r$ und konvergiert gegen r , wenn s gegen $-\infty$ strebt.

214. Jetzt können wir den Satz von GREEN über das Wachstum der im Nullpunkt verschwindenden Jacobifelder beweisen. Solche Jacobifelder werden durch den Lagrange-Tensor A mit den Anfangswerten

$$A(0) = 0, \quad A'(0) = 1$$

beschrieben. Ihr Wachstum wird daher durch $\|A^{-1}\|^{-1}$ nach unten abgeschätzt: Ist J ein Jacobifeld längs einer Geodätischen c mit $J(0) = 0$, so gilt für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$\|J(t)\| \geq \|A(t)^{-1}\|^{-1} \|J(0)\|$$

(vgl. Anhang).

Satz: ([10], [6]) Zu jeder Geodätischen $c : (-\varepsilon, \infty) \rightarrow M$ ohne konjugierte Punkte gibt es eine monoton wachsende, unbeschränkte Funktion $b : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ mit

$$\|A(t)^{-1}\|^{-1} \geq b(t) \quad \text{für } t \geq 0.$$

Bew.: Zur Abschätzung der Unternorm von A können wir auf folgende Fakten zurückgreifen:

1. Die Abschätzung 213 für symmetrische Lösungen der Riccati-Gleichung, z.B. für $A'A^{-1}$ und für $D'D^{-1}$.
2. Die Norm des symmetrischen, positiv definiten Tensors $X = DA^{-1}$, $X(t) = \int_t^\infty (A^*A)^{-1}(u)du$ fällt monoton gegen 0 (vgl. 132).
3. Zwischen A und D besteht die Relation $W(A,D) = \text{Const.}$, d.h.

$$A^*D - A^*D^* = 1, \text{ oder} \\ A^{-1*}A^* - D^*D^{-1} = A^{-1*}D^{-1} = A^{-1*}X^{-1}A^{-1}$$

Die linke Seite dieser letzten Beziehung können wir mit 1. abschätzen, auf der rechten Seite liefert 2. eine Abschätzung für X^{-1} , und so gelangen wir zu einer Abschätzung für A^{-1} .

Linke Seite: Für alle $y \in N_0 c$, $\|y\| = 1$

$$|\langle (A^*A^{-1})^* - D^*D^{-1} \rangle y, y \rangle| \leq |\langle A^*A^{-1} y, y \rangle| + |\langle D^*D^{-1} y, y \rangle| \\ \leq 4r$$

im Bereich $[T, \infty)$, wenn wir dort die Funktion f_0 durch die obere Schranke $2r$ ersetzen: $T = (\text{arccoth}(2))/r$.

Rechte Seite:

$$|\langle A^{-1*}X^{-1}A^{-1} y, y \rangle| = \langle X^{-1}A^{-1} y, A^{-1} y \rangle \geq \|X\|^{-1} \|A^{-1} y\|^2,$$

denn $\|X\|^{-1}$ ist der kleinste Eigenwert von X^{-1} (vgl. Anhang).

Folglich

$$\|A^{-1} y\|^2 \leq 4r \|X\| \quad \text{für alle } y \in N_0 c \text{ mit } \|y\| = 1,$$

also

$$\|A^{-1}\| \leq (4r \|X\|)^{1/2}.$$

Definieren wir also

$$b(t) := (4r \|X(t)\|)^{-1/2} \quad \text{für alle } t \geq T$$

und wählen eine stetige, monotone Fortsetzung

$$0 \leq b(t) \leq \|A(t)\|^{-1} \quad \text{für } 0 \leq t \leq T,$$

so erfüllt die in dieser Weise definierte Funktion b :

$[0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ die Behauptung des Satzes. \square

2.2 Mannigfaltigkeiten ohne konjugierte Punkte

221. Voraussetzung der letzten Sätze war immer, daß die betrachtete Geodätische frei von konjugierten Punkten war. Wollen wir globale Resultate gewinnen, so müssen wir diese Forderung an alle Geodätischen einer Mannigfaltigkeit stellen.

Def.: Wir sagen von einer Mannigfaltigkeit M , daß sie ohne konjugierte Punkte ist, wenn M zusammenhängend und vollständig ist und auf keiner Geodätischen $c: \mathbb{R} \rightarrow M$ konjugierte Punkte vorkommen. (Abkürzung: M ist OK.)

Für eine solche Mannigfaltigkeit M ist jede Exponentialabbildung $\exp_p: T_p M \rightarrow M$, $p \in M$, eine Überlagerungsabbildung. (Vgl. [12], S. 201) Die universelle Überlagerung von M^{n+1} ist also diffeomorph zum \mathbb{R}^{n+1} , und alle Geodätischen sind dort Kürzeste. M ist ein $K(\pi, 1)$ -Raum, und die Fundamentalgruppe $G = \pi_1 M$ operiert als eigentlich diskontinuierliche Isometrieengruppe auf der universellen Überlagerung A mit $A/G = M$. Wir werden daher häufig " M einfach zusammenhängend" ("es") voraussetzen. Die Verhältnisse auf einer beliebigen OK-Mannigfaltigkeit ergeben sich dann in trivialer Weise durch Betrachtung der universellen Überlagerung und Rückprojektion. Nicht einfach zusammenhängende, z.B. kompakte OK-Mannigfaltigkeiten enthalten aber noch zusätzliche Struktur, weil auf ihrer universellen Überlagerung die Fundamentalgruppe als nichttriviale Iso-

metrieengruppe wirkt. Davon werden wir in Kapitel 4 und 5 Gebrauch machen.

222. Das Ergebnis von § 2.1 möchten wir in einem Begriff zusammenfassen können:

Def.: Eine Mannigfaltigkeit M heiße infinitesimal divergent (ID), wenn sie zusammenhängend und vollständig ist und es eine im 2. Argument stetige und (streng) monoton gegen ∞ wachsende Funktion $b : SM \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ gibt mit

$$b(v, t) \leq \|A_v(t)^{-1}\|^{-1}$$

für alle $v \in SM$, $t \geq 0$.

Insbesondere ist jede ID-Mannigfaltigkeit OK, denn ein Jacobifeld $J \neq 0$ mit $J(0) = 0$ längs einer Geodätischen c_v wächst in folgender Weise:

$$\|J(t)\| \geq b(v, t) \cdot \|J'(0)\| > 0 \quad \text{für } t > 0.$$

In 214 haben wir nun den folgenden Satz bewiesen:

Theorem 3 Sei M eine Mannigfaltigkeit mit beschränkter Schnittkrümmung: $K \geq -r^2$ für ein $r > 0$.

Beh.: M ist genau dann infinitesimal divergent, wenn M ohne konjugierte Punkte ist. □

Weitere Beispiele für ID-Mannigfaltigkeiten sind die Mannigfaltigkeiten mit nichtpositiver Schnittkrümmung, denn dort gilt nach dem Rauch'schen Vergleichssatz:

$$\|A_v(t)^{-1}\|^{-1} \geq t \quad \text{für alle } v \in SM, \quad t \in \mathbb{R}$$

(vgl. [12], S. 178).

223. Wir wollen in den folgenden Abschnitten diese Eigenschaft untersuchen und insbesondere die Frage stellen, wann wir aus der infinitesimalen Divergenz eine globale Bedingung für das Verhalten von Geodätischen herleiten können, die folgendermaßen lauten müßte:

Def.: Sei M eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit ohne konjugierte Punkte. M hat die Eigenschaft der uniformen Divergenz (UD), wenn folgendes gilt: Für jede divergente Punktfolge $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in M und jeden geodätischen Strahl $c : [0, \infty) \rightarrow M$, von dem die Punkte p_i beschränkten Abstand haben für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt: Die geodätischen Strecken c_i von $c(0)$ nach p_i konvergieren gegen c .

Nennen wir einen geodätischen Strahl $c_v : [0, \infty) \rightarrow M$ Grenzstrahl der divergenten Punktfolge (p_i) , wenn der Anfangsvektor v Häufungspunkt der Vektoren $c_i'(0)$ in $T_{c_v(0)}M$ ist, so können wir die Bedingung der uniformen Divergenz auch so formulieren: Ist c ein von p ausgehender geodätischer Strahl, der beschränkten Abstand von einer divergenten Punktfolge (p_i) besitzt, so ist c der einzige Grenzstrahl von (p_i) , der den Punkt p trifft. Insbesondere können zwei von einem Punkt p ausgehenden geodätischen Strahlen mit verschiedener Anfangsrichtung niemals beschränkten Abstand voneinander haben. Die Eigenschaft UD können wir unter einer stärkeren Voraussetzung als ID beweisen:

Satz: (O'SULLIVAN) Sei M eine vollständige, zusammenhängende und einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Beh.: Wenn es für jede kompakte Teilmenge K von SM eine monoton wachsende, stetige, unbeschränkte Funktion $a :$

$[0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ gibt mit

$$a(t) \leq \|A_v(t)^{-1}\|^{-1} \quad \text{für alle } v \in K, \quad t \geq 0,$$

dann gilt auf M die uniforme Divergenz.

Bew.: Wir beweisen sogar etwas Stärkeres: Seien (p_i) und (q_i) divergente Punktfolgen in M von beschränktem Abstand

$$d(p_i, q_i) \leq d \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N},$$

d eine positive Konstante. Sei $p \in M$ und b_i und c_i die

geodätischen Strecken von p nach p_1 und q_1 . Wir wollen zeigen: α_1 , der Winkel zwischen b_1 und c_1 , strebt gegen 0 für $i \rightarrow \infty$. Sei

$$k = ((v, t) \mapsto \exp_p tv): S_p M \times (0, \infty) \rightarrow M$$

die Kongruenz, deren Flußtensofeld A_v ist (vgl. 143). Unter der kanonischen Identifizierung von $T_v T_p M$ und $T_p M$ wird $f_{A_v} = \text{id}$ und $k_{t*}(v) = A_v(t)$ bis auf Parallelverschiebung.

Sei $a_1(u)$ die geodätische Strecke von p_1 nach q_1 ; unter der Kongruenzabbildung läßt sich a_1 in Komponenten zerlegen:

$$a_1(u) = k(v_1(u), t_1(u)) \quad .$$

Wir wählen einen neuen Parameter $s = s(u)$ so, daß die Kurve $v_1(s)$ auf $S_p M$ dann nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Sei l_1 die Länge der Kurve v_1 auf $S_p M$, $l_1 \rightarrow \alpha_1$. Dann ist

$$\begin{aligned} d &\geq L(a_1) = \int_0^{l_1} \|k_{*}(\frac{d}{ds})(v_1(s), t_1(s))\| ds \\ &= \int_0^{l_1} \left\{ \left\| k_{t_1(s)*} \frac{dv_1}{ds}(s) \right\|^2 + \left\| k_{v_1(s)*} \frac{dt_1}{ds}(s) \right\|^2 \right\}^{1/2} ds \\ &\geq \int_0^{l_1} \|A_{v_1(s)}(t_1(s)) \frac{dv_1}{ds}(s)\| ds \end{aligned}$$

Weil alle $v_1(s)$ in dem kompakten Bereich $S_p M$ von SM liegen, können wir die $A_{v_1(s)}$ uniform durch eine Funktion a wie in der Voraussetzung beschrieben nach unten abschätzen. Die $t_1(s)$ schätzen wir durch den Abstand $t_1 := d(p, a_1)$ nach unten ab, und wegen der Monotonie von $a(t)$ gilt weiterhin

$$d \geq \int_0^{l_1} \|A_{v_1(s)}(t_1(s)) \frac{d}{ds} v_1(s)\| ds \geq a(t_1) \cdot l_1 \geq a(t_1) \cdot \alpha_1 \quad ,$$

denn der Tangentialvektor von $v_1(s)$ hat nach Wahl des Parameters s die Länge 1. Da nun die beiden Folgen (p_1) und (q_1) divergieren und beschränkten Abstand voneinander haben, divergiert auch die Folge (t_1) der Entfernungen von p zur Verbindungsstrecke a_1 , und wegen der vorausgesetzten Wachstums-eigenschaft von a strebt

$$\alpha_1 \leq \frac{d}{a(t_1)}$$

für große i gegen Null.

224. Die Voraussetzung von Satz 223 kann bewiesen werden, wenn wir die Stetigkeit in v der Asymptotischen Lösung D_v sichern können:

Lemma: M sei eine Mannigfaltigkeit ohne konjugierte Punkte mit beschränkter Schnittkrümmung. Die Asymptotische Lösung D_v längs der Geodätischen c_v hänge stetig von v ab, d.h. $v \mapsto D_v'(0)$ sei ein stetiges Feld von $\binom{1}{1}$ -Tensoren im Bündel π^*TM .

Beh.: Dann gibt es für jede kompakte Teilmenge K von SM eine monotone, unbeschränkte Funktion $a : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, so daß

$$\|A_v(t)^{-1}\|^{-1} \geq a(t) \quad \text{für alle } v \in K, \quad t \geq 0.$$

Bew.: Mit D_v ist auch $X_v = A_v^{-1}D_v$ stetig in v und damit ist

$$b(v, t) = (4r \cdot \|X_v(t)\|)^{-1/2}$$

stetig im Bereich $SM \times [T, \infty)$, wo $T = \operatorname{arccoth}(2)/r$ wie in 214, $-r^2$ die untere Krümmungsschranke. Sei

$$S := \min\{b(v, T) \mid v \in K\}$$

für eine kompakte Teilmenge K von SM . Wegen der Monotonie in t ist $b_v(t) := b(v, t)$ für jedes $v \in K$ im Bereich $t \geq T$ umkehrbar und nimmt jeden Wert $s \geq S$ an. Wir erhalten also eine stetige Funktion $t : K \times [S, \infty) \rightarrow [T, \infty)$, definiert durch

$$t(v, s) := b_v^{-1}(s) \quad \text{für alle } v \in K, \quad s \geq S.$$

Setzen wir

$$t(s) := \max\{t(v, s) \mid v \in K\},$$

dann gilt $b_v(t(s)) \geq s$ für alle $v \in K$. Damit ist

$$a(t) := \min\{b(v, t) \mid v \in K\} \quad \text{für } t \geq 0$$

monoton und stetig, nimmt beliebig große Werte an und bildet eine untere Schranke für $\|A_v(t)^{-1}\|^{-1}$, $v \in K$. \square

Satz: M sei eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit beschränkter Schnittkrümmung. Die Asymptotische Lösung D_v sei stetig in v . Dann erfüllt M die uniforme Divergenz. \square

Leider scheint die OK-Bedingung nicht die Stetigkeit von D_v in v zu implizieren. Hinreichende Bedingungen dafür wären die uniforme Konvergenz der D_{av} gegen D_v in einem kompakten v -Bereich K oder die Existenz einer in $[t, \infty)$, $t > 0$, integrierbaren oberen Schranke für die positiv definiten Tensoren $(A_v^* A_v)^{-1}(u)$, $v \in K$. Es besteht jedoch kein Anlaß anzunehmen, daß eine von beiden Bedingungen im Allgemeinen erfüllt sein sollte, obwohl noch keine Gegenbeispiele vorliegen.

2.3 Volumen weit entfernter Hyperflächen

231. Auf 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten ohne konjugierte Punkte sind wir in einer weit günstigeren Situation. Dort können wir tatsächlich UD aus ID schließen. Dieser Satz ist ein Korollar der allgemeinen Tatsache, daß unter der Voraussetzung ID das Volumen von Hyperflächen, die in einen Kegel eingespannt sind, weit weg vom Scheitelpunkt des Kegels groß wird.

Dazu zunächst eine Vorbemerkung: Sei E^{n+1} ein euklidischer Vektorraum, $i: F \hookrightarrow E$ eine Hyperebene durch den Ursprung. Die Volumenform von F sei dF . G bezeichne einen weiteren n -dimensionalen Unterraum von E , der mit F den Winkel α einschließt, und γ sei die zu G orthonormale n -Form auf E , d.h. für jede Orthonormalbasis $e_1, \dots, e_n \in G$, $e_{n+1} \perp G$ gilt: $\gamma(e_1, \dots, e_{n+1}) = \delta_{1, n+1}$. Für die beiden n -Formen dF und $i^* \gamma$ auf F gilt dann:

$$|i^* \gamma| = |\cos \alpha \cdot dF| \leq |dF|.$$

Es sei die Basis von G nämlich so gewählt, daß $e_1, \dots, e_{n-1} \in G \cap F$. Sei $e'_n \in F$ ein weiterer Einheitsvektor orthogonal zu e_1, \dots, e_{n-1} . Dann ist

$$\begin{aligned} i^* \gamma(e_1, \dots, e_{n-1}, e'_n) &= \gamma(e_1, \dots, e_{n-1}, \langle e'_n, e_n \rangle e_n + \langle e'_n, e_{n+1} \rangle e_{n+1}) \\ &= \cos \alpha \cdot \gamma(e_1, \dots, e_n) \\ &= \cos \alpha. \end{aligned}$$

Weil $dF(e_1, \dots, e_n) = 1$, ist $\cos \alpha$ gerade der Quotient der beiden Formen auf F .

232. Sei jetzt M^{n+1} wieder eine einfach zusammenhängende ID-Mannigfaltigkeit. Ein Punkt $p \in M$ werde fest gewählt. Wir führen auf M Polarkoordinaten mit p als Ursprung ein:

$$h = (h_1, h_2): M \setminus \{p\} \rightarrow S_p M \times (0, \infty),$$

definiert als Umkehrfunktion $h = k^{-1}$ der schon in 223 benutzten Kongruenz $k(v, t) = \exp_p tv$. Zu einem festen Vektor $v \in S_p M$ und einem Öffnungswinkel ε betrachten wir die Kugelkappe

$$K = K(v, \varepsilon) = \{w \in S_p M \mid \angle(v, w) \leq \varepsilon\}$$

und den zugehörigen Kegel $k(K \times (0, \infty))$.

Def.: Ein System von Hyperflächen $(F_t)_{t>0}$ in M nennen wir kegelförmig, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) $h_1|_{F_t}$ ist Diffeomorphismus für alle t .
- (ii) $h_1(F_t) = K$, K die oben definierte Kugelkappe
- (iii) $h_2|_{F_t} > t$ für alle t .

Ein Beispiel für ein kegelförmiges Hyperflächensystem sind die Riemannschen Kugelkappen: $F_t = k(K \times \{t\})$ für alle $t > 0$.

Theorem 4 Sei M eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit infinitesimaler Divergenz.

Beh.: Die Volumina von jedem kegelförmigen Hyperflächensystem $(F_t)_{t>0}$ divergieren, d.h.

$$\text{Vol } F_t \rightarrow \infty \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

Bew.: Wir untersuchen zunächst die Volumenform dF_t von F_t . Sei ω die Volumenform von M und $\eta := \iota_V \omega$, wo $V = k_* \left(\frac{d}{dt} \right)$: η ist die durch $\eta(x_1, \dots, x_n) := \omega(V, x_1, \dots, x_n)$ definierte n -Form auf $M \setminus \{p\}$. Sie ist in dem in 231 präzisierten Sinne orthogonal zu $k_*(TS_p M)$, daher gilt

$$|dF_t| \geq |i^* \eta|$$

mit der Inklusion $i: F_t \hookrightarrow K$. Wegen der Kugelförmigkeit, Bedingungen (i) und (ii), ist $f_t := (h_t|_{F_t})^{-1}: K \rightarrow F_t$ ein Diffeomorphismus. Mit Hilfe dieser Diffeomorphismen können wir alle dF_t auf K zurückholen und dort miteinander vergleichen. Wir haben dort die Abschätzung

$$|f_t^* dF_t| \geq |f_t^* i^* \eta|.$$

Definieren wir eine Funktion $t(w)$ durch

$$f_t(w) =: k(w, t(w)),$$

so läßt sich das Differential von f_t folgendermaßen beschreiben:

$$f_{t*}(w)x = k_{t(w)*}(w)x + (t_*(w)x)V$$

für alle $x \in T_w K$. Wenden wir η auf Vektoren dieser Art an, so spielt der 2. Summand in V -Richtung wegen $\eta = i_V \omega$ keine Rolle, also ist

$$f_t^* i^* \eta(w) = k_{t(w)*}^* \eta(w).$$

Wir können Bild $k_{t(w)*}(w) = N_{t(w)} c_w$ mit $N_0 c_w$ via Parallelverschiebung identifizieren, und der letztere Raum ist kanonisch isomorph zu $T_w K = T_w S_p M$. Nach 143 erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} |k_{t(w)*}^* \eta(w)| &= |A_w(t(w))^* dS| = |\det A_w(t(w)) \cdot dS| \\ &\geq a(w, t(w))^n |dS| \end{aligned}$$

wobei $a(w, t) := \|A_w(t)^{-1}\|^{-1}$. Das letzte gilt, weil das Bild des Einheitsballes unter der Abbildung $A_w(t)$ einen Ball vom Radius $a(w, t)$ enthält. Die durch $A_w(t)$ erfahrene Volumenänderung muß größer sein als der Quotient der Volumina der beiden Bälle. Insgesamt haben wir also die Abschätzung:

$$|f_t^* dF_t(w)| \geq a(w, t(w))^n |dS(w)| \quad \text{für alle } w \in K.$$

Jetzt können wir das Volumen von F_t abschätzen:

$$\text{Vol } F_t = \int_{F_t} dF_t = \int_K f_t^* dF_t \geq \int_K a(w, t(w))^n dS(w).$$

Annahme: Es gibt eine Folge $t_i \rightarrow \infty$ und eine Konstante C mit

$$\text{Vol } F_{t_i} \leq C \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Setze dann $C' := (2C)^{1/n} (\text{Vol } K)^{-1/n}$ und betrachte die

Mengen

$$T_1 := \{w \in K \mid a(w, t_1(w)) < C'\}$$

$$S_1 := \bigcup_{j>1} T_j = \{w \in K \mid \exists_{j>1} a(w, t_j(w)) < C'\}.$$

Dabei ist die Funktion t_j analog wie oben implizit definiert:

$$f_{t_j}(w) =: k(w, t_j(w)) \quad \text{für alle } w \in K.$$

Zwei Fälle sind möglich oder besser unmöglich, wie wir gleich sehen werden:

Fall 1: $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} S_i \neq \emptyset.$

Dann gibt es also ein $w \in K$ so, daß

$$\forall_{i \in \mathbb{N}} \exists_{j>i} a(w, t_j(w)) < C'.$$

Nach Bedingung (iii) ist $t_j(w) \geq t_j$, also bildet $(t_j(w))_{j \in \mathbb{N}}$ eine divergente Folge, und $a(w, t_j(w))$ kann wegen der Voraussetzung ID nicht beschränkt bleiben. Widerspruch!

Fall 2: $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} S_i = \emptyset.$

Da die Funktion $w \mapsto a(w, t_j(w))$ stetig, also meßbar ist für alle $j \in \mathbb{N}$, sind die Mengen T_j und damit die S_i meßbar, und wegen $\bigcap_i S_i = \emptyset$ und $S_i \subset S_{i-1}$ strebt das Lebesgue-Maß $\mu(S_i)$ für große i gegen 0. Die Komplemente sehen so aus:

$$K \setminus S_i = \{w \in K \mid \forall_{j>i} a(w, t_j(w)) \geq C'\}.$$

Damit erhalten wir die folgende Volumenabschätzung für alle i :

$$\begin{aligned} \text{Vol } F_{t_1} &\geq \int_K a(w, t_1(w))^n dS(w) \\ &\geq \int_{K \setminus S_i} a(w, t_1(w))^n dS(w) \\ &\geq 2C(\text{Vol } K)^{-1} \mu(K \setminus S_i) \\ &= 2C \cdot \left(1 - \frac{\mu(S_i)}{\mu(K)}\right) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 2C, \end{aligned}$$

womit $\text{Vol } F_{t_1}$ für genügend große i doch größer als C wäre, im Widerspruch zur Annahme!

233. Für den 2-dimensionalen Spezialfall ergibt sich die uniforme Divergenz als Korollar, wie schon angekündigt:

Kor.: Sei M eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit mit infinitesimaler Divergenz. Dann erfüllt M die uniforme Divergenz.

Bew.: Sei $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine divergente Punktfolge in M . Der geodätische Strahl $c: [0, \infty) \rightarrow M$ mit Anfangspunkt $p \in M$ habe Abstand $d(c, p_i) < C$ von allen p_i . Sei $g: [0, \infty) \rightarrow M$ ein von p ausgehender Grenzstrahl der Folge (p_i) .

Annahme: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß $\angle(c'(0), g'(0)) > \varepsilon$.

OBDÄ (Übergang zu einer Teilfolge) liegen alle c_i in einem Kegel um g mit Öffnungswinkel $\varepsilon/3$. Sei b ein weiterer geodätischer Strahl von p , der zwischen c und g liegt und dessen Anfangsvektor $b'(0) \in S_p M$ von $c'(0)$ den Winkelabstand $\varepsilon/3$ hat. Die Verbindungsstrecken d_i von p_i nach c haben alle eine durch C beschränkte Länge und werden von b geschnitten. Die zwischen b und c liegenden Teilabschnitte d_i' von d_i haben erst recht beschränkte Länge, bilden aber andererseits ein kegelförmiges Hyperflächensystem in M mit Kugelkappe $K = K(v, \varepsilon/6)$, wo $v = \frac{b'(0) + c'(0)}{\|b'(0) + c'(0)\|}$; Widerspruch zu 232! \square

3. Mannigfaltigkeiten beschränkter Asymptote

3.1 Wachstum der Jacobifelder

311. Wir wollen in diesem Kapitel eine große Klasse von OK-Mannigfaltigkeiten untersuchen, bei denen die in 2.2 besprochenen Schwierigkeiten behoben sind.

Def.: Eine Mannigfaltigkeit M ist von beschränkter Asymptote (BA), wenn folgendes gilt:

(1) M ist OK

(ii) Es gibt eine Konstante $C > 0$ so, daß alle Asymptotischen Lösungen durch C beschränkt sind:

$$\|D_v(t)\| \leq C \quad \text{für alle } v \in SM, \quad t \geq 0.$$

Die wichtigsten Beispiele für BA-Mannigfaltigkeiten sind einerseits die Mannigfaltigkeiten ohne Fokulpunkte, insbesondere also alle Mannigfaltigkeiten nichtpositiver Krümmung, andererseits hyperbolische Mannigfaltigkeiten. Von diesen Spezialfällen werden die Kapitel 4 und 5 handeln. GULLIVER ([15]) hat hyperbolische Mannigfaltigkeiten mit Fokulpunkten konstruiert, andererseits sind z.B. flache Mannigfaltigkeiten nicht hyperbolisch; die Klasse der BA-Mannigfaltigkeiten ist also echt größer als jede der beiden Spezialfall-Klassen.

312. Die grundlegende Eigenschaft der BA-Mannigfaltigkeiten wird durch den folgenden Satz gegeben: die uniforme Konvergenz der D_{sv} .

Satz: Sei M eine BA-Mannigfaltigkeit mit Schranke C .

Beh.: Die Anfangswerte der D_{sv} konvergieren uniform in $v \in SM$ gegen die Anfangswerte der Asymptotischen Lösung in folgender Weise:

$$\|D'_v(0) - D'_{sv}(0)\| \leq \frac{C^2}{s} \quad \text{für alle } v \in SM, \quad s > 0.$$

Bew.: In Kor. 132 haben wir bewiesen, daß die abzuschätzende Differenz gerade durch den Tensor $X_v(s) = \int_s^{\infty} (A_v^* A_v)^{-1}(u) du$ gegeben wird. Nun wissen wir leider über A_v vorläufig gar nichts. Aber X war ja nach dem allgemeinen Verfahren 122 als Quotient zweier Jacobitensoren bestimmt worden: $X = A^{-1}D$. Da A und D beide Lagrange-Tensorfelder sind, können wir nach dem gleichen Verfahren den inversen Tensor $X^{-1} = D^{-1}A$ bestimmen und erhalten durch Nachrechnen der Anfangsbedingungen von $A = X^{-1}D$: (Alle Tensoren hängen von $v \in SM$ ab!)

$$X^{-1}(s) = \int_0^s (D^* D)^{-1}(u) du.$$

Diese Gleichung werten wir für den kleinsten Eigenwert der symmetrischen Tensoren rechts und links aus: (vgl. Anhang)

$$\begin{aligned} \|X(s)\|^{-1} &= \left\| \left[\int_0^s (D^* D)^{-1}(u) du \right]^{-1} \right\|^{-1} \\ &\geq \int_0^s \|(D^* D)(u)\|^{-1} du \\ &= \int_0^s \|D(u)\|^{-2} du \\ &\geq c^{-2} \cdot s, \end{aligned}$$

und die letzte Ungleichung gilt unabhängig von v . Wir erhalten somit für alle $v \in SM$:

$$\|D_v'(0) - D_{sv}'(0)\| = \|X(s)\| \leq \frac{c^2}{s}.$$

313. Ist $Y_v(t)$ ein Jacobitensorfeld, $v \in SM$, so läßt sich für jedes $t \in R$ das Paar $(Y_v(t), Y_v'(t))$ als Abbildung

$$Y_v(t) : (\pi^* TM)_{\phi_t v} \longrightarrow T_{\phi_t v} SM$$

auffassen unter Ausnutzung der horizontalen und vertikalen Aufspaltung von $T'SM$ (vgl. 111). Nach 121 gilt mit den dortigen Bezeichnungen:

$$Y(0) = f_Y: \pi^* TM \longrightarrow T'SM,$$

$$Y(t) = \phi_{t*} Y(0).$$

Wenn von Stetigkeit oder Konvergenz von Jacobitensoren die Rede ist, sind die entsprechenden Eigenschaften bei diesen Bündelhomomorphismen gemeint. In diesem Sinne sind die folgenden Aussagen zu verstehen.

Lemma: M sei eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei S das Infimum aller Abstände von zueinander konjugierten Punkten auf M .

Beh.: $D_{sv}(t)$ ist C^∞ -differenzierbar in $v \in SM$ für alle $s \in [0, S)$, $t \in \mathbb{R}$.

Bew.: Es bezeichne $P_t: \pi'^{-1}TM \rightarrow \pi'^{-1}TM$ für alle $t \in \mathbb{R}$ die verallgemeinerte Parallelverschiebung: Ein Vektorpaar (v, x) , $v \in SM$, $x \perp v$, wird längs der Geodätischen c_v um das Stück t parallelverschoben. Damit definieren wir die Abbildung P_t :

$$\begin{array}{ccc} T'SM & \xrightarrow{\phi_{t*}} & T'SM \\ P_t \downarrow & & \downarrow \pi_* \\ \pi'^{-1}TM & \xleftarrow{P_t^{-1}} & \pi'^{-1}TM \end{array}$$

Das ist ein Bündelhomomorphismus, der den Wert eines Jacobifeldes mit gegebenen Anfangswerten zur Zeit t beschreibt.

Die zur Zeit s verschwindenden Jacobifelder werden durch $\ker F_s$ gegeben. Solange im Intervall $[0, s]$ keine konjugierten Punkte vorkommen, schneidet dieses C^∞ -Unterbündel der Faserdimension n das Vertikale Bündel \mathcal{V} transversal.

Nach dem impliziten Funktionentheorem ist somit $\ker F_s$ Graph einer C^∞ -Abbildung $f: \pi'^{-1}TM = \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{V}'$, die wieder ein Bündelhomomorphismus sein muß. f gibt den Vertikalanteil der bei s verschwindenden Jacobifelder am Anfang an, also gilt $D'_{sv}(0) = f_v$, und die Anfangswerte von D_{sv} hängen somit C^∞ -differenzierbar von $v \in SM$ ab, solange $s < S$. \square

314. Als Korollar von 312 erhalten wir jetzt:

Satz: M sei eine Mannigfaltigkeit beschränkter Asymptote. Dann konvergieren die Tensoren $D_{sv}(t)$ gleichmäßig in $v \in K$ gegen

die Asymptotische Lösung $\underline{D}_v(t)$ für jede kompakte Teilmenge K von SM . \underline{D}_v ist stetig in v überall auf SM .

Bew.: Die Anfangswerte $D'_s(0)$ konvergieren gleichmäßig gegen $D'(0)$, und ϕ_{t*} ist eine C^∞ -Abbildung; insbesondere ist sie stetig vom Fußpunktvektor $v \in SM$ abhängig, in einem kompakten v -Bereich K daher sogar gleichmäßig stetig. Somit konvergieren $\underline{D}_s(t) = \phi_{t*} \circ \underline{D}_s(0)$ gleichmäßig in K gegen $\underline{D}(t)$, und die Abbildung $v \mapsto \underline{D}_v(t)$ ist stetig für alle $v \in SM$, $t \in \mathbb{R}$. \square

Theorem 5 Sei M eine Mannigfaltigkeit beschränkter Asymptote mit Schnittkrümmung $K > -r^2$. Dann haben die im Nullpunkt verschwindenden Jacobifelder mindestens Quadratwurzel-Wachstum:

$$\|A_v(t)^{-1}\|^{-1} \geq C^{-1}(4r)^{-1/2} \cdot t^{1/2}$$

für alle $v \in SM$ und alle $t \geq T$, wo C die Schranke von D ist. Ist M zusätzlich einfach zusammenhängend, so ist die uniforme Divergenz erfüllt.

Bew.: In 214 wurde bewiesen, daß

$$\|A_v(t)^{-1}\|^{-1} \geq (4k\|x_v(t)\|)^{-1/2} \quad \text{für } t \geq T.$$

In 312 konnten wir zeigen, daß

$$\|x_v(t)\| \leq C^2/t \quad \text{für alle } v \in SM \text{ und } t > 0.$$

Die Kombination beider Aussagen ergibt die erste Behauptung. Die uniforme Divergenz im einfach zusammenhängenden Fall folgt nach 223. \square

3.2 Unendliche Konvergenz und Topologie im Unendlichen

321. Eine weitere, von der uniformen Divergenz unabhängige Eigenschaft der Geodätischen auf BA-Mannigfaltigkeiten erlaubt es, topologisch sinnvoll von unendlich fernen Punkten zu reden: die unendliche Konvergenz. Wir wollen uns dazu zunächst überlegen, wie eine

Topologie im Unendlichen aussehen sollte. Wenn wir von einem hohen Turm in eine Ebene E blicken, so sehen wir rings um uns in Augenhöhe den Horizont $L(E)$. Wir projizieren nämlich jeden Punkt der Ebene zentral auf die offene untere Halbkugel unserer Sehkugel der Richtungen von unserem Standpunkt aus (besser geeignet wäre ein in Azimuth- und Horizontalrichtung drehbares Fernrohr); dabei erscheint uns der Horizont als Rand dieses Bildbereiches, also als der Äquator unserer Sehkugel. Jede Gerade der Ebene wird bei dieser Abbildung auf einen Großkreisbogen projiziert, und die Bilder paralleler Strahlen laufen alle auf denselben Punkt des Äquators zu. Wollen wir den Horizont $L(E)$ also intrinsisch aus der Geometrie der Ebene E beschreiben, so müssen wir seine Punkte als Äquivalenzklassen zueinander paralleler Strahlen definieren. Mit Hilfe der stereographischen Projektion erhält die so definierte Menge $\bar{E} := E \cup L(E)$ die Topologie der abgeschlossenen Kreisschreibe. Natürlich läßt sich die gleiche Konstruktion für jeden euklidischen Raum E^n durchführen.

Die Frage ist nun, für welche nichtkompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten wir eine ähnliche Konstruktion nachahmen können. Unendlich ferne Punkte ("Horizontpunkte") können wir stets folgendermaßen definieren:

Def.: Sei M eine vollständige, zusammenhängende, nichtkompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine Geodätische $r : [0, \infty) \rightarrow M$, die kürzeste Verbindung aller Punkte ist, die auf ihr liegen, heißt Strahl. Die Menge der Strahlen in M heiße R . Zwei Strahlen $r, s \in R$ heißen vom gleichen Typ ($r \sim s$), wenn sie beschränkten Abstand voneinander haben; " \sim " ist eine Äquivalenzrelation auf R . Ein unendlich ferner (oder uneigentlicher) Punkt von M ist eine Äquivalenzklasse von R . R/\sim , die Menge der unendlich fernen Punkte, heißt der Horizont von M , $L(M)$.

Wir möchten nun der Menge $\bar{M} := M \cup L(M)$ eine vernünftige Topologie geben. Die natürlichste Idee ist wohl, die Exponentialabbildungen $\exp_p: T_p M \rightarrow M$ zu Hilfe zu nehmen. Wir hätten dann für jedes $p \in M$ eine Fortsetzung $\overline{\exp}_p: T_p M \rightarrow \bar{M}$ zu konstruieren. Das ist jedoch nur dann möglich, wenn alle von p ausgehenden Geodätischen Strahlen sind. Im Allgemeinen werden wir \exp_p nur auf die Teilmenge $T_p M \cup L_p$ von $T_p M$ fortsetzen können, wobei $L_p \subset L(T_p M)$ als die Menge der Klassen von denjenigen Strahlen in $T_p M$ definiert wird, deren Bilder unter \exp_p Strahlen in M sind. Schließlich sollten wir noch fordern, daß eine in M divergente Folge die durch ihre Grenzstrahlen definierten Horizontpunkte als Häufungspunkte in \bar{M} hat. Wir fassen diese Forderungen in drei Axiomen zusammen:

Def.: Eine Topologie im Unendlichen von M (nichtkompakt, vollständig, zusammenhängend) ist eine Topologie auf $\bar{M} = M \cup L(M)$, die folgende drei Axiome erfüllt:

- (TU₁) Die Topologie von \bar{M} setzt die Topologie von M fort.
- (TU₂) Für alle $p \in M$ ist $\overline{\exp}_p: T_p M \cup L_p \rightarrow \bar{M}$ stetig.
- (TU₃) Eine divergente Punktfolge in M , die einen Grenzstrahl g besitzt, häuft sich in \bar{M} bei dem durch g repräsentierten Horizontpunkt.

Eine solche Topologie haben EBERLEIN und O'NEILL in [7] für einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeiten von nichtpositiver Krümmung eingeführt.

322. Wir geben nun ein hinreichendes Kriterium dafür an, wann eine solche Topologie im Unendlichen existiert:

Def.: Ein Grenzstrahl einer divergenten Punktfolge heiße echt, wenn er keinen anderen Grenzstrahl derselben Folge trifft.

Eine nichtkompakte, vollständige, zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit M besitzt die Eigenschaft der unend-

lichen Konvergenz (UK), wenn es eine Funktion $m: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ gibt mit folgender Eigenschaft: Sind g und h zwei echte Grenzstrahlen derselben divergenten Punktfolge in M mit Anfangsabstand $d(g(0), h(0)) \leq r$, so gilt

$$d(g(t), h(t)) \leq m(r) \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Satz: Sei M eine nichtkompakte, vollständige, zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit unendlicher Konvergenz.

Beh.: Auf M gibt es eine eindeutig bestimmte Topologie im Unendlichen. \bar{M} ist kompakt mit dieser Topologie. Alle Abbildungen $\overline{\exp_p}: T_p M \cup L_p \rightarrow \bar{M}$ sind surjektiv für $p \in M$.

Bew.: Die Surjektivität von $\overline{\exp_p}$ zeigen wir zuerst. Wenn wir L_p mit den entsprechenden Strahlen durch den 0-Punkt von $T_p M$ oder auch mit deren Anfangsvektoren identifizieren, so ist

$$\overline{\exp_p}(s) := [\exp_p \circ s] \in L(M) \quad \text{für Strahlen } s \in L_p.$$

Ist $Q \in L(M)$ und $r \in Q$ ein repräsentierender Strahl, so finden wir einen Strahl $c \in Q$ mit Anfang p , indem wir p mit Punkten $r(t_1)$ verbinden ($t_1 \rightarrow \infty$) und zum Limes einer Teilfolge dieser Strecken übergehen. Es gibt also ein $s := \exp_p^{-1}(c)$ mit $\overline{\exp_p}(s) = Q$.

Wollen wir eine Topologie im Unendlichen definieren, dann ist der folgende Begriff von abgeschlossenen Mengen durch (TU_2) und (TU_3) erzwungen:

1. Eine Teilmenge $A \subset L(M)$ ist genau dann abgeschlossen, wenn das volle Urbild $\overline{\exp_p}^{-1}(A)$ in L_p abgeschlossen ist.
2. Ein uneigentlicher Punkt $P \in L(M)$ ist Häufungspunkt einer in M divergenten Punktfolge $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ genau dann, wenn ein Strahl $r \in P$ Grenzstrahl von (p_i) ist.

Zu zeigen ist, daß diese Definitionen notwendig und verträglich sind.

Zu 1: Nach (TU_2) ist klar, daß es nicht mehr abgeschlossene

Mengen in $L(M)$ geben kann, als unter 1. angegeben. Andererseits muß es auch so viele geben, denn L_p ist abgeschlossen, also kompakt, und die Bilder abgeschlossener Teilmengen von L_p müssen somit abgeschlossen sein. Für die Verträglichkeit ist zu zeigen, daß die Definition 1. nicht vom Punkt p abhängig ist. Sei also $\overline{\exp_p}^{-1}(A)$ abgeschlossen, dann soll auch $\overline{\exp_q}^{-1}(A)$ abgeschlossen sein für alle $q \in M$. Wir wählen dazu eine Folge (v_i) in $\overline{\exp_q}^{-1}(A)$, die gegen ein $v \in L_q$ konvergiere; zu zeigen ist, daß auch v im Urbild liegt. Wegen der Kompaktheit von $\overline{\exp_p}^{-1}(A)$ gibt es dort eine konvergente Folge $w_j \rightarrow w$ so, daß für die zugehörigen Strahlen in M gilt:

$$c_{w_j} \sim c_{v_{i_j}} \quad \text{für eine Teilfolge } v_{i_j};$$

oBdA sei $i_j = j$. Weil also die c_{w_j} von den c_{v_j} einen durch $m(d(p,q))$ beschränkten Abstand haben für alle j , ist dasselbe auch für die Limites c_w und c_v richtig. c_w repräsentiert aber einen Punkt $P \in A$, also $c_v \in P \in A$ und $v \in \overline{\exp_q}^{-1}(A)$.

Zu 2 ist zu zeigen, daß es einen eindeutigen Konvergenzbegriff gibt und $\overline{\exp_p}$ Limites in Limites überführt. Ist also g ein echter Grenzstrahl einer divergenten Punktfolge in M , so soll jeder andere Grenzstrahl vom gleichen Typ sein, und das ist gerade wegen der unendlichen Konvergenz richtig.

Damit sind nun abgeschlossene Teilmengen auf \bar{M} wie folgt erklärt: Eine Menge $A \subset \bar{M}$ ist genau dann abgeschlossen, wenn gilt: a) $A \cap M$ ist abgeschlossen in M .

b) $A \cap L(M)$ ist abgeschlossen in $L(M)$.

c) A enthält alle seine Häufungspunkte im Unendlichen.

Die dadurch definierte Topologie erfüllt alle TU-Bedingungen, und die Konstruktion ist eindeutig bestimmt. Da im übrigen jede Folge in M oder in $L(M)$ einen Häufungspunkt besitzt,

ist \bar{M} mit dieser Topologie kompakt: Entweder sie bleibt in einem kompakten Bereich von M , oder sie divergiert in M und besitzt nach 2. einen Häufungspunkt in $L(M)$, oder sie besitzt eine Teilfolge in $L(M)$, aber $L(M) = \overline{\exp_p(L_p)}$ ist kompakt.

323. Wir kehren nun zu den BA-Mannigfaltigkeiten zurück.

Theorem 6 Sei M eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit beschränkter Asymptote.

Beh.: M erfüllt die unendliche Konvergenz und besitzt damit eine Topologie im Unendlichen.

Bew.: Sei $(o_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine divergente Punktfolge in M , g, h zwei von p und q aus gehende echte Grenzstrahlen von (o_i) . Zu zeigen ist die Existenz einer Funktion m mit

$$d(g(t), h(t)) \leq m(d) \quad \text{für alle } t \geq 0,$$

wo $d \geq d(p, q)$.

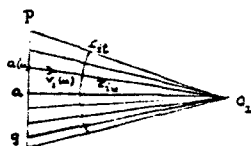
Seien g_i und h_i die Strecken von o_i nach p bzw. q . Mit $a(u)$ bezeichnen wir die Strecke von p nach q und mit r_{iu} die Querverbindungen von o_i nach $a(u)$; $r_{iu}(t) := r_{iu}(t) =: r_{it}(u)$ ist die zugehörige Variation von Geodätischen. Die Entfernung $d(a(u), o_i)$ sei $s_i(u)$. Schließlich sei

$$v_i(u) := - \frac{\partial}{\partial t} r(u, t) \Big|_{t=t_i(u)}.$$

Dann gilt für $0 \leq t \leq s_i := \min_u \{s_i(u)\}$

$$\begin{aligned} d(g_i(t), h_i(t)) &\leq L(r_{it}) = \int_0^d \left\| \frac{\partial}{\partial u} r(u, t) \right\| du \\ &\leq \int_0^d \left\| D_{s_i(u)} v_i(u) (s_i(u) - t) \right\| du. \end{aligned}$$

Nun strebt $d(a, o_i) = s_i \rightarrow \infty$ für große i gegen ∞ , und die Vektoren $v_i(u)$ liegen in einer kompakten Menge, also gilt für vorge-



gegebenes $t' := s_i(u) - t$ und genügend großes $i \in \mathbb{N}$ unabhängig von u :

$$\|D_{s_i}(u), v_i(u)(t')\| < 2C$$

(vgl. 314), wo C die obere Schranke aller $D_v(t)$, $v \in SM$, $t > 0$. Damit gilt schließlich

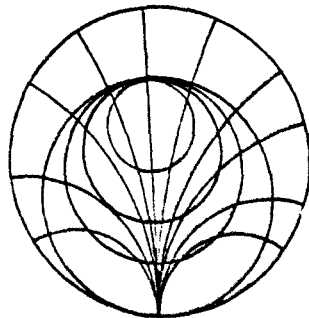
$$d(g_i(t), h_i(t)) < \int_0^d 2C \, du = 2C \cdot d$$

für alle $t(t) \geq 0$ und hinreichend große $i \in \mathbb{N}$ in Abhängigkeit von t . Da g_i und h_i bis auf Parametrisierung die Strahlen g und h approximieren, folgt die Behauptung für $m(d) = 2C \cdot d$, bei genauerer Abschätzung der $D_{s_i}(u)$ für große i sogar für $m(d) = C \cdot d$. \square

3.3 Horosphären

331. Der Begriff der Horosphäre stammt aus der hyperbolischen Geometrie. In dem durch das Innere des euklidischen Einheitsballes konform äquivalent beschriebenen Poincaré-Modell des hyperbolischen Raumes H^n werden die Horosphären durch diejenigen euklidischen Sphären gegeben, die die begrenzende Einheitssphäre berühren. (Vgl. etwa [3], S.173 für das äquivalente Halbebenenmodell des H^2 .)

Intrinsisch beschrieben ist für einen Strahl $r: [0, \infty) \rightarrow H^n$ die Einhüllende aller Sphären, die durch den Punkt $r(0)$ gehen und Mittelpunkt auf r haben, eine Horosphäre H , und H ist die Horosphäre aller Strahlen, die auf H senkrecht stehen.



Wir wollen zeigen, daß derart intrinsisch definierte Horosphären für alle Mannigfaltigkeiten beschränkter Asymptote existieren.

Def.: Sei M eine nichtkompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit, $r: [0, \infty) \rightarrow M$ ein Strahl in M . Wir nennen einen zweiten Strahl s in M eine Asymptote zu r , wenn s Grenzstrahl einer Folge der Form $(r(t_i))_{i \in \mathbb{N}}$ ist mit $t_i \rightarrow \infty$. Ist M einf. zusammenhängend ohne konjugierte Punkte, so definieren wir für jedes $v \in SM$ den Horodisk B_v wie folgt:

$$B_v = \bigcup_{s > 0} B_s(c_v(s)) ,$$

wenn $B_s(p) = \{q \in M \mid d(p, q) \leq s\}$ den Ball mit Zentrum p und Radius s bezeichnet. Die Horosphäre H_v ist der Rand des Horodisks:

$$H_v = \partial B_v .$$

332. "Asymptote" soll nicht suggerieren, daß der Abstand der beiden Strahlen voneinander beliebig klein wird, was schon im euklidischen Raum nicht der Fall ist, oder auch nur beschränkt bleibt. Es wird dadurch auch im allgemeinen keine Äquivalenzrelation erklärt; die Relation "Asymptote" ist i.a. nicht einmal symmetrisch. Asymptoten sind aber eng mit den Horosphären verknüpft, wie der folgende Satz zeigt.

Theorem 7 Sei M Mannigfaltigkeit ohne konjugierte Punkte und ein-

fach zusammenhängend. Dann gilt für alle Vektoren $v \in SM$

(i) H_v ist C^1 -differenzierbare Hyperfläche.

(ii) $H_v(t)$ mit $v(t) := c_v'(t)$ ist die Parallelfäche zu H_v im Abstand t für alle $t \in \mathbb{R}$.

(iii) Durch jeden Punkt $p \in M$ gibt es genau eine Asymptote zu c_v . Ist $p \in H_v$, so steht sie senkrecht auf H_v .

(vi) Es gibt eine homöomorphe Produktzerlegung

$$M \cong H_v \times \mathbb{R}$$

mit den Parallelfächen $H_v(t)$ einerseits und den Asymptoten zu c_v andererseits als Fasern.

Den Beweis dieses Satzes führen wir mit Hilfe zweier Lemmas:

Lemma 1 Falls $o \in H_V$ und c_W Asymptote zu c_V durch o , so gilt:

$$B_W \subset B_V.$$

Bew.: Sei $r \in B_W$. Zu jedem

$\varepsilon > 0$ gibt es einen Punkt s

auf c_W so, daß

$$(a) \quad |s, r| \leq |s, q| + \frac{\varepsilon}{3}$$

wo $|x, y| := d(x, y)$ die Abstandsfunction bezeichnen

soll. Die Wahl von s ist möglich, weil B_W Horodisk ist.

Ebenso können wir, weil H_V Horosphäre ist, weit draußen auf c_V einen Punkt u finden, so daß gleichzeitig

$$(b) \quad |u, q| \leq |u, p| + \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{und}$$

$$(c) \quad |s, t| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

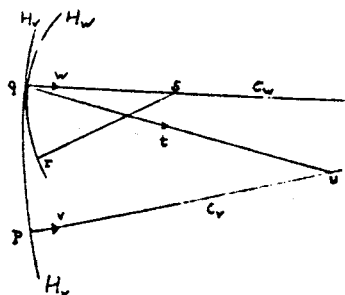
erfüllt sind, wobei t derjenige Punkt auf der Strecke uq ist, für den

$$(d) \quad |t, q| = |s, q|.$$

Das ist möglich, da Strecken der Form qu die Asymptote c_W approximieren. Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir:

$$\begin{aligned} |r, u| &\leq |r, s| + |s, t| + |t, u| \\ &\leq |q, s| + 2 \frac{\varepsilon}{3} + |t, u| \quad \text{wegen (a) und (c),} \\ &\leq |q, t| + |t, u| + 2 \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{wegen (d),} \\ &= |q, u| + 2 \frac{\varepsilon}{3} \\ &\leq |p, u| + \varepsilon \quad \text{wegen (b).} \end{aligned}$$

Liegt also u nur genügend weit entfernt von p auf c_V , so hat r beliebig kleinen Abstand von dem Ball $B_{|u, p|}(u)$, muß also in der Hülle aller Bälle dieser Form, d.h. in B_V liegen.



Lemma 2 Sei $r = c_w(t)$ für ein $t < 0$ und $K := \overset{\circ}{B}_{|t|}(r)$ der offene Ball um r mit Radius $|t|$. Dann gilt:

$$K \cap B_v = \emptyset.$$

Bew.: Annahme: Es existiert $x \in K \cap B_v$.

Es gibt also eine Zahl $C > 0$ so, daß

$$(a) \quad |r, x| = |r, q| - C.$$

Für ein positives $\varepsilon < C$ gibt es andererseits einen Punkt u auf c_v , so daß

$$(b) \quad |u, x| < |u, p| + \frac{\varepsilon}{2},$$

denn $x \in B_v$. Sei s auf dem Strahl von u durch q der Punkt hinter q , für den

$$(c) \quad |s, q| = |r, q|.$$

Liegt u genügend weit draußen (und die Abschätzung (b) kann dabei nur besser werden), approximiert wieder die Strecke qu die Geodätische c_w so gut, daß

$$(d) \quad |s, r| < \frac{\varepsilon}{2},$$

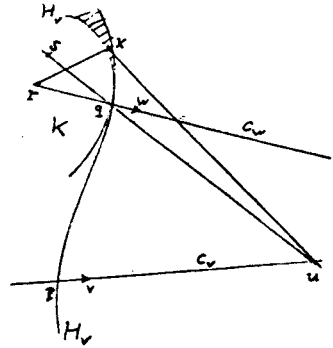
weil $\angle(r, q, s)$ klein wird. Also gilt einerseits:

$$\begin{aligned} |s, u| &\leq |s, r| + |r, x| + |x, u| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + |r, q| - C + |u, p| + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{mit (d), (a) und (b),} \\ &< |r, q| + |u, p|. \end{aligned}$$

Andererseits aber wegen (c) und weil $q \in H_v$:

$$\begin{aligned} |s, u| &= |s, q| + |q, u| \\ &> |r, q| + |p, u|, \end{aligned}$$

und das ist ein Widerspruch!



Bew. Theorem 7: Nach Lemma 1 und 2 liegt B_w , erst recht $B_s(c_w(s))$ für $s > 0$ in B_v , für $t < 0$ dagegen $B_{|t|}(c_w(t))$ außerhalb von B_v . Da die Ränder dieser Bälle sich in q berühren, d.h. gemeinsamen Tangentialraum haben, die Horosphäre $H_v = \partial B_v$

aber dazwischengeklemt ist, ist H_V in C^1 -differenzierbar, und die Asymptote c_w ist die (eindeutig bestimmte!) Geodätische durch q senkrecht zu H_V . Weil weiterhin für festes $s \in R$ die Differenz der Abstände $|c_w(s), c_V(t)| - |c_w(0), c_V(t)|$ für $t \rightarrow \infty$ gegen s strebt, liegt $c_w(s)$ auf der Horosphäre $H_V(s)$, und diese hat somit konstanten Abstand $|s|$ von H_V .

Um schließlich zu zeigen, daß die Horosphären die ganze Mannigfaltigkeit überdecken, definieren wir die Busemannfunktion $b_V: M \rightarrow R$ wie folgt:

$$b_V(q) := \lim_{t \rightarrow \infty} (|q, c_V(t)| - |p, c_V(t)|)$$

Weil die Differenz in der Klammer mit t monoton fällt und beschränkt ist, ist dieser Limes überall definiert und stetig. Die Niveauflächen $b_V^{-1}(s)$ sind gerade die Horosphären $H_V(s)$. Sie überdecken also ganz M und ebenso die von Punkten $q \in H_V$ ausgehenden Asymptoten zu c_V (die wir jetzt einfach mit c_q bezeichnen wollen), denn es sind die orthogonalen Trajektorien der Horosphären. Die Abbildung

$$f_V := ((q, s) \mapsto c_q(s)) : H_V \times R \rightarrow M$$

ist also bijektiv und homöomorph, liefert daher die gewünschte Produktzerlegung. □

333. Auf BA-Mannigfaltigkeiten können wir bessere Differenzierbarkeitseigenschaften beweisen. Dazu betrachten wir für jeden Vektor $v \in SM$ (M sei OK, ez) das Tangentialfeld V_s der auf den Punkt $c_v(s)$ zulaufenden Geodätischen; es gilt $V_s = -\text{grad } d(o_v(s), \cdot)$ (vgl. 152), und V_s ist auf $M \setminus \{c_v(s)\}$ definiert. Außerdem bezeichne V das Tangentialfeld der Asymptoten von c_v ; nach Definition der Asymptoten gilt $V = \lim V_t$. Mit diesen Bezeichnungen gilt der folgende Satz:

Satz: Sei M eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit beschränkter Asymptote. Dann gilt:

- (i) Für jeden Vektor $v \in SM$ konvergieren die zugehörigen Vektorfelder $V_s(p)$ uniform in jeder kompakten Teilmenge K von M , falls $s \rightarrow \infty$, gegen $V(p)$.
- (ii) V ist C^1 und $\nabla V_s(p) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \nabla V(p)$ uniform für $p \in K$.
- (iii) Die Produktzerlegung $M = H_v \times R$ ist C^1 -differenzierbar für jeden Vektor $v \in SM$.
- (iv) Jede Horosphäre H ist C^2 -differenzierbar mit II. Fundamentaltensor

$$A_H(p) = -D'_{V(p)}(0) \quad \text{für alle } p \in H,$$

wo $v(p)$ der richtig orientierte Normalenvektor von H in p ist.

Bew.: Zu (i): Wir wählen eine Zahl $t_0 \geq 0$ so, daß

$$c_v([t_0, \infty)) \cap K = \emptyset$$

und der Abstand von $c_v(t)$ zu dem Kompaktum K für alle $t \geq t_0$ größer ist als $r > 0$. Dann gibt es für alle $p \in K$ und alle $s > t_0$ ein $t > r$ so, daß

$$\nabla V_s(p) = D'_{t, V_s(p)}(0)$$

(vgl. 142), denn V_s ist Flußvektorfeld der Normalenkongruenz der Sphären mit Zentrum $c_v(s)$; t ist der Abstand $|p, c_v(s)|$. Nach 132 ist für $s > t_0$

$$D'_{t, V_s(p)}(0) < \nabla V_s(p) < D'_{V_s(p)}(0).$$

Da diese oberen und unteren Schranken stetig, auf K also beschränkt sind, sind die Ableitungen von V_s uniform beschränkt auf K und daher V_s gleichgradig stetig. Nach dem Satz von AZELA und ASCOLI konvergieren die V_s dann gleichmäßig in K gegen V .

Zu (ii): Nach 312 konvergieren die Tensoren $D'_{t, V_s(p)}(0)$ gleichmäßig in $v \in SM$ gegen $D'_v(0)$, falls $t \rightarrow \infty$. Also strebt $\nabla V_s(p) = D'_{t, V_s(p)}(0)$ mit $t := |p, c_v(t)|$ gegen $D'_{V(p)}(0)$, wenn $s \rightarrow \infty$, und zwar gleichmäßig für alle $p \in K$ wegen (i). Somit hat V die stetige Ableitung $\nabla V(p) = D'_{V(p)}(0)$.

Zu (iii) und (iv): Ist $H = H_V$ eine Horosphäre, so ist insbesondere das Einheitsnormalvektorfeld $V|_H$ C^1 -differenzierbar, also auch die Abbildung $f_V(p, t) = c_V(p)(t)$, die in 332 das Produkt definierte. Außerdem ist H eine C^2 -Hyperfläche mit $A_H = -\nabla V$ nach 153 und 142. \square

3.4 Die stabile Blätterung

341. Bisher haben wir noch nicht davon geredet, wann die Relation "Asymptote" eine Äquivalenzrelation ist und wie verschiedenartige Horosphären zusammenpassen. Hat eine nichtkompakte Mannigfaltigkeit die Eigenschaft der unendlichen Konvergenz (UK), so sind asymptotische Strahlen vom gleichen Typ. Ist andererseits UD (Uniforme Divergenz) erfüllt, so können nicht zwei verschiedene Strahlen gleichen Typs vom selben Punkt ausgehen. Sind also beide Bedingungen UK und UD gesichert, wie etwa bei einer BA-Mannigfaltigkeit mit beschränkter oder nichtpositiver Schnittkrümmung, so gibt es zu einem festen Strahl r von jedem Punkt p aus genau einen Strahl r_p vom gleichen Typ wie r . Weil es von p aus auch genau einen zu r asymptotischen Strahl \bar{r}_p gibt (332), dieser aber (UK!) auch vom gleichen Typ wie r ist, muß $\bar{r}_p = r_p$ gelten, und die Begriffe "asymptotisch" und "vom gleichen Typ" fallen zusammen. Insbesondere ist "asymptotisch" eine Äquivalenzrelation.

Ist nun zusätzlich noch die Eigenschaft BA erfüllt, so können wir die Äquivalenzklassen genau durch die Horosphären darstellen. Ist nämlich H_V eine Horosphäre und c_W eine Asymptote zu c_V mit Anfangspunkt $q \in H_V$, so haben H_V und H_W gemeinsame Normalen, nämlich die Asymptoten zu c_V . Nach 154 ist die Abstandsfunktion $d(p) := d(p, H_W)$ für $p \in H_V$ überall auf H_V stationär, also konstant gleich Null, da sie bei q den Wert 0 hat. Somit fallen H_V und H_W zusammen. Wir haben folgendes Resultat erhalten:

Theorem 8 Sei M einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit beschränkter Asymptote mit uniformer Divergenz.

Beh.: Zu jedem uneigentlichen Punkt $P \in L(M)$ gibt es eine C^1 -Blätterung $\coprod_{t \in \mathbb{R}} H_t$ von C^2 -differenzierbaren Blättern H_t . Zwei Blätter H_s und H_t haben den konstanten Abstand $|s - t|$ voneinander.

Jedes Blatt H_s ist gleich der Horosphäre H_v für alle nach P gerichteten Einheitsnormalvektoren v auf H_s .

Die orthogonalen Trajektorien der H_s sind genau die Geodätischen in M mit Endpunkt P . Die Normalenkongruenz

$$k = \exp|_{NH_0} : H_0 \times \mathbb{R} \rightarrow M$$

ist bijektiv. □

342. Eine Geodätische $c = c_v : \mathbb{R} \rightarrow M$ (M ez, BA, UD) durchschneidet bei $c(0)$ zwei Horosphären: H_v und H_{-v} , die sich dort berühren. Unter welchen Umständen können H_v und H_{-v} weitere Punkte gemeinsam haben?

Theorem 9 Sei M einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit beschränkter Asymptote mit uniformer Divergenz.

Beh.: Für jeden Vektor $v \in SM$ gilt:

- (i) Alle Schnittpunkte von H_v und H_{-v} sind Berührungspunkte.
- (ii) $H_v \cap H_{-v} = B_v \cap B_{-v}$.
- (iii) $H_v \cap H_{-v}$ ist (wegweise) zusammenhängend.
- (iv) Die Punkte von $H_v \cap H_{-v}$ liegen auf Geodätischen mit beiderseits beschränktem Abstand von c_v , und jede derartige Geodätische schneidet $H_v \cap H_{-v}$.

Bew.: Zu (i): Nehmen wir an, es gäbe einen transversalen Schnittpunkt q zwischen H_v und H_{-v} , so sind die Normalvektoren u und w von H_v und H_{-v} nicht linear abhängig. c_u ist Asymptote von c_v , c_w Asymptote von c_{-v} . Die Strecken $q, c_v(t)$ und

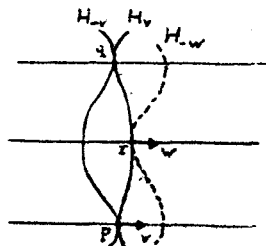
$q, c_v(-t)$ approximieren die Strahlen c_u und c_w für große t beliebig genau, und die Differenzen $|t - |q, c_v(t)||$ und $|t - |q, c_v(-t)||$ werden beliebig klein. Da die Strecken aber einen von 180° wegbeschränkten Knickwinkel einschließen, läßt sich der Knick verkürzen, unabhängig von t , und c_v kann somit für genügend große t nicht kürzeste Verbindung von $c_v(t)$ nach $c_v(-t)$ sein; Widerspruch!

Zu (ii): Aus dem gleichen Grunde können die Horodisks B_v und B_{-v} keine inneren Punkte gemeinsam haben: Ein solcher Punkt hätte nämlich für genügend großes t einen Abstand kleiner als t zu $c_v(t)$ und $c_{-v}(t)$, und wieder könnte c_v nicht Kürzeste sein.

Zu (iii): Annahme: Es gibt einen weiteren Berührungspunkt $q \in H_v \cap H_{-v}$, der in einer anderen Zusammenhangskomponente von $H_v \cap H_{-v}$ liegt als $p = c_v(0)$.

Wir betrachten wie in 154 die Distanzfunktion $d: H_v \rightarrow \mathbb{R}_+$ von H_v nach H_{-v} : $d(p) := d(p, H_{-v})$. Weil alle Nullstellen dieser Funktion wegen (ii) Berührungspunkte sind, ist d auch an den Nullstellen und damit überall auf H_v C^2 -differenzierbar.

Wir behaupten jetzt, daß es weitere kritische Punkte von d geben muß, die keine Nullstellen sind. Denn anderenfalls wäre $\text{Crit } d = H_v \cap H_{-v}$, und H_v ließe sich an den Integralkurven von $\text{grad } d$ entlang auf $d^{-1}(0) = H_v \cap H_{-v}$ zusammenziehen (2.1), aber im Gegensatz zu H_v sollte $H_v \cap H_{-v}$ nicht zusammenhängend sein nach Annahme. Das ist also unmöglich, und demnach



existiert ein weiterer kritischer Punkt r mit $d(r) = s > 0$. Die Kürzeste von r nach H_{-v} steht auf beiden Horosphären senkrecht, ihre Vervollständigung ist also Asymptote zu c_v in beiden Richtungen. Ihr Anfangs-

vektor in r sei w . Statt H_{-v} betrachten wir nun die um das Stück s verschobene Paralleelfläche $H_{-v}(s)$, $v(s) := c'_v(s)$ (vgl. 332, (ii)). Sie berührt die Fläche H_v im Punkte r mit gemeinsamer Normalen c_w . Es gilt also wegen 341:

$$H_w = H_v, \quad H_{-w} = H_{-v}(s).$$

Aber die Punkte der Form $c_v(t)$, $0 \leq t \leq s$, liegen nach Konstruktion in $B_v \cap B_{-v}(s) = B_w \cap B_{-w}$, was nach (ii) unmöglich ist. Widerspruch!

$H_v \cap H_{-v}$ ist somit zusammenhängend.

Zu (iv): Geodätische von beschränktem Abstand zu c_v sind nach beiden Richtungen asymptotisch zu c_v , sind also genau diejenigen Geodätischen, die beide Hyperflächen, H_v und H_{-v} , senkrecht durchschneiden. Diese beiden Schnittpunkte fallen zusammen, denn anderenfalls erhalten wir nach dem Muster von (iii) einen Widerspruch zu (ii), indem wir die Paralleelfläche von H_{-v} durch den Schnittpunkt der Geodätischen mit H_v betrachten.

Folgerung: Sind unter den gleichen Voraussetzungen (ez, BA, UD)

$c_0, c_1 : \mathbb{R} \rightarrow M$ zwei Geodätische mit beschränktem Abstand voneinander, so gibt es eine C^1 -Fläche

$$F: [0,1] \times \mathbb{R} \rightarrow M,$$

so daß die Kurven $c_s(t) := F(s,t)$ für $0 \leq s \leq 1$ eine Schar von Geodätischen mit beschränktem Abstand von c_0 und c_1 bilden und die Vektorfelder $F_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)$ und $F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ längs F aufeinander senkrecht stehen.

Bew.: Sei $v := c'_0(0)$ mit Fußpunkt p . Nach (vi) des vorstehenden Satzes schneiden sich H_v , H_{-v} und c_1 in einem Punkt q ; sei $oBdA \quad q = c_1(0)$. Weil $H_v \cap H_{-v}$ zusammenhängender Schnitt von C^2 -Mannigfaltigkeiten ist, gibt es eine C^1 -Kurve

$b: [0,1] \rightarrow H_v \cap H_{-v}$ mit $b(0) = p$ und $b(1) = q$. Für $s \in [0,1]$

sei c_s die Asymptote zu c_0 mit $c_s(0) = b(s)$, und

$$F(s, t) := c_s(t) = f_v(b(s), t)$$

(vgl. S. 64). F ist C^1 -differenzierbar, weil f_v C^1 -differenzierbar ist (333, S.66). Die Geodätischen c_s durchschneiden H_v und H_{-v} und damit auch alle parallelen Hyperflächen senkrecht, daher sind $F_*(\frac{\partial}{\partial s})$ und $F_*(\frac{\partial}{\partial t})$ orthogonal zueinander. \square

343. Wir wollen nun die gewonnenen Ergebnisse in die Sprache des Geodätischen Flusses übertragen.

Def.: Sei U eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine 1-Parameter-Gruppe von Diffeomorphismen (Fluß) $\phi_t: U \rightarrow U$, $t \in \mathbb{R}$ heißt stabil, wenn bei einer kleinen Änderung der Anfangswerte $p \in U$ die Orbits $t \mapsto \phi_t(p)$ "für alle Zukunft" $t > 0$ nahe beieinander bleiben:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall t > 0 \quad [|p, q| < \delta \Rightarrow |\phi_t p, \phi_t q| < \varepsilon] .$$

Der Fluß heißt instabil, wenn sich die Orbits bei einer beliebig kleinen Änderung der Anfangswerte in Zukunft beliebig weit voneinander entfernen:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall C \in \mathbb{R} \quad \exists T > 0 \quad \forall t > T \quad [|p, q| > \varepsilon \Rightarrow |\phi_t p, \phi_t q| > C] .$$

Eine Untermannigfaltigkeit $W \subset U$ heißt stabil (bzw. instabil), wenn ϕ_t auf $\phi_+ W := \bigcup_{t \geq 0} \phi_t W$ stabil (bzw. instabil) ist.

Der Stabilitätsbegriff entspricht der L^+ -Stabilität (Liapounov-Stabilität) in [1]. Der Instabilitätsbegriff ist hier jedoch stärker als die Negation der Stabilität.

Für das folgende Theorem benötigen wir die Zusatzvoraussetzung, daß $D'(0)$, die Anfangsableitung der Asymptotischen Lösung, überall auf SM beschränkt ist. Haben wir beschränkte Krümmung $K > -r^2$ auf K , so ist diese Zusatzvoraussetzung erfüllt; nach 213 gilt

$$\|D'(0)\| \leq r .$$

Theorem 10 M sei eine Mannigfaltigkeit ohne konjugierte Punkte mit infinitesimaler Divergenz, $\dim M = n+1$. Dann gilt:

- (i) M ist genau dann von beschränkter Asymptote mit beschränkter Anfangsableitung $D'_v(0)$ der Asymptotischen Lösung für alle $v \in SM$, wenn es eine stetige, ϕ -invariante n-Distribution \mathcal{X} auf SM senkrecht zum Fluß gibt, auf der das Differential des Geodätischen Flusses für alle Zukunft uniform beschränkt ist:

$$\|\phi_{t*} \mathcal{X}\| \leq C \in \mathbb{R} \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Diese Distribution ist integrierbar, und die Integralmannigfaltigkeiten sind unter dem Geodätischen Fluß stabil.

- (ii) Ist M von beschränkter Asymptote, so ist die Distribution $\mathcal{X} := \text{Bild } f_D$ (vgl. 121) auf SM transversal zum Vertikalen Bündel \mathcal{V} . Dieses ist nicht Fluß-invariant, aber integrierbar mit Integralmannigfaltigkeiten, die unter dem Geodätischen Fluß instabil sind, falls M einfach zusammenhängend mit beschränkter Krümmung ist.

Bew.: Zu (i): Für alle $v \in SM$ und $t \geq 0$ gelte

$$\|D_v(t)\| \leq C, \quad \|D'_v(0)\| \leq C' \in \mathbb{R}.$$

Sei $\mathcal{X} := \text{Bild } f_D \subset T^*SM$ mit der Bezeichnung von 121. Für jedes $w \in \mathcal{X}$ gibt es also ein $x \in T_x^*M$ mit

$$w = f_D x = (x, D'(0)x) \in T^*SM.$$

Dann ist

$$\|\phi_{t*} w\| = \|(D(t)x, D'(t)x)\| = (\|D(t)x\|^2 + \|D'(t)x\|^2)^{1/2}.$$

Wegen 133 gilt

$$D'_v(t) = D_v(t) \cdot D'_{\phi_t v}(0),$$

also auch für den Fußvektor v von x (bis auf Parallelverschiebung):

$$\|D'_v(t)x\| \leq \|D_v(t)\| \|D'_{\phi_t v}(0)\| \|x\|.$$

Setze jetzt $\|x\| = 1$, dann ist $\|w\| \geq 1$ und damit

$$\left\| \phi_{t*} \left(\frac{w}{\|w\|} \right) \right\| \leq \left\| \phi_{t*} w \right\| \leq (C^2 + C^2 C''^2)^{1/2} =: C'$$

und damit

$$(*) \quad \left\| \phi_{t*} \right\| \leq C' \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Sei umgekehrt \mathcal{X} ein ϕ -invariantes n -dimensionales Unterbündel von $T'SM$, so daß $(*)$ gilt. Für jedes $w = (x, y) \in \mathcal{X}$ ist das zugehörige Jacobifeld $J(t)$ mit

$$J(0) = x, \quad J'(0) = y$$

längs $c_{\pi w}$ für alle $t \geq 0$ in Wert und Ableitung beschränkt. Dann muß aber

$$J = \lim D_s x$$

gelten, denn sonst hätten die Jacobifelder $J_s := J - D_s x$ mit $J_s(0) = 0$ eine für alle $s \geq 0$ von 0 wegbeschränkte Ableitung, andererseits würde für alle $s \geq 0$ gelten

$$\left\| J_s(s) \right\| \leq C'$$

im Widerspruch zur Bedingung ID! Also gilt aus Dimensionsgründen $\mathcal{X} = \text{Bild } f_D$, und D ist in Wert und Ableitung für $t \geq 0$ beschränkt.

Eine Integralmannigfaltigkeit X von \mathcal{X} bilden nach Satz 144 die orientierten Einheitsnormalvektoren auf einer Horosphäre (vgl. 333, (iv)!). Weil ϕ_{t*} auf \mathcal{X} für alle $t \geq 0$ gleichmäßig beschränkt ist, ist X stabile Untermannigfaltigkeit von SM . Da durch jeden Vektor $v \in SM$ eine Integralmannigfaltigkeit X_v zur Horosphäre H_v geht, ist \mathcal{X} integrierbar.

Zu (ii): Da D keine Singularitäten hat, ist \mathcal{X} transversal zu \mathcal{V} an jeder Stelle. Die Integralmannigfaltigkeiten von \mathcal{V} sind die Fasern $S_p M$; die Instabilität folgt aus der uniformen Divergenz. \square

344. Die hyperbolischen Mannigfaltigkeiten, zu denen die Mannigfaltigkeiten strikt negativer Krümmung zählen, sind durch zwei zu-

einander transversale Fluß-invariante Blätterungen auf dem Sphärenbündel gekennzeichnet: die stabile X und die (im ez-Fall) instabile Y (vgl. Kap. 5). Bei den BA-Mannigfaltigkeiten, zu denen ja auch die flachen Mannigfaltigkeiten gehören, gibt es nur die stabile Blätterung; eine invariante instabile Blätterung fehlt im allgemeinen. Der Kandidat für eine solche Blätterung wäre die invariante Blätterung jX , wo $j: SM \rightarrow SM$ die Inversion $j(v) := -v$ bezeichnet. 342 zeigt jedoch, daß jX weder instabil noch transversal zu X zu sein braucht. EBERLEIN hat in [6] bewiesen, daß schon im Fall kompakter OK-Mannigfaltigkeiten, wo immer noch die nicht mehr notwendig stetige Distribution $\tilde{X} = \text{Bild } f_D$ erklärt ist, die Transversalität von \tilde{X} und $j_*\tilde{X}$ äquivalent ist zur ANOSOV-Bedingung.

Man könnte nun geneigt sein zu hoffen, daß die BA-Bedingung auf kompakten Mannigfaltigkeiten eine offene Teilmenge im Raum aller Metriken kennzeichnet, wie es bei der ANOSOV-Bedingung der Fall ist. Das ist jedoch leider nicht der Fall, und im allgemeinen besteht keine Hoffnung, überhaupt eine offene Bedingung zu finden, die die Mannigfaltigkeiten nichtpositiver Krümmung erfaßt und keine konjugierten Punkte zuläßt, jedenfalls nicht auf Mannigfaltigkeiten, die eine Ricci-flache Metrik zulassen:

Satz: Sei M eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit, und g_0 eine Metrik auf M mit Ricciskrümmung Null. Dann gibt es keine offene Bedingung für Metriken auf M , die auf g_0 zutrifft und OK impliziert.

Bew.: Sei \mathcal{M} der Raum aller Riemannschen Metriken (positiv definiten symmetrischen $\binom{0}{2}$ -Tensoren) auf M ; zu jedem $g \in \mathcal{M}$ bezeichne R_g die Skalarkrümmung der Metrik g ,

$$\Lambda(g) := \int_M R_g(p) \, dM(p)$$

die totale Skalarkrümmung. Nach einem Satz von P.EHRlich

([8]) gibt es in jeder Umgebung $U(g_0)$ in \mathcal{M} Metriken $g_1, g_2 \in U$ mit

$$A(g_1) < 0 < A(g_2) .$$

Andererseits hat GREEN ([11]) folgendes bewiesen: Eine Metrik g auf M kann nur dann die Bedingung OK erfüllen, wenn $A(g) \leq 0$. Also gibt es nach dem Vorigen in jeder Umgebung von g_0 Metriken mit konjugierten Punkten. \square

3.5 Vergleichssätze

351. Als letzte Eigenschaften der Mannigfaltigkeiten beschränkter Asymptote möchten wir, ähnlich wie bei hyperbolischen Mannigfaltigkeiten (521), Vergleichssätze für Winkel und Strecken in großen Dreiecken beweisen. Das erscheint hoffnungslos, wenn wir für die Vergleichsmannigfaltigkeit Schnittkrümmung $K = 0$ voraussetzen, denn auch der Anosov-Vergleichssatz ist nur möglich, weil wir "Platz" für die Krümmung der Vergleichsmannigfaltigkeit haben. Wegen der Wachstumseigenschaft 314 ist aber ein Vergleich mit einem geeigneten Paraboloiden möglich, dessen Krümmung wenigstens genügend weit entfernt vom Scheitel beliebig nahe bei Null liegt.

Def.: Für jedes $k > 0$ definieren wir das $(n+1)$ -dimensionale Paraboloid P_k als Einbettung in den \mathbb{R}^{n+2} : $P_k = \text{Bild } e$ mit

$$e: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}, \quad e(x) := (x, k^2 \|x\|^2)$$

oder mit Hilfe der Metrik in Polarkoordinaten (g, σ)

$$P_k = (\mathbb{R}^{n+1}, ds^2), \quad ds^2 = dg^2 + R(g)^2 d\sigma^2,$$

wobei dg^2 die Metrik der Sphäre S^n ist und $R(g)$ den euklidischen Radius der Riemannschen Kugel mit Radius g um den Scheitelpunkt σ angibt. Die Umkehrfunktion $g(R)$ kann folgendermaßen angegeben werden:

$$\begin{aligned} g(R) &= k^2 R^2 \left\{ [1 + (2k^2 R)^2]^{1/2} + (2k^2 R)^{-2} \operatorname{arsinh}(2k^2 R) \right\} \\ &= \int_0^R [1 + (2k^2 r)^2]^{1/2} dr . \end{aligned}$$

352. Zunächst ein Vergleichssatz für die Jacobifelder:

Satz: M sei eine Mannigfaltigkeit beschränkter Asymptote mit oberer Schranke C und Schnittkrümmung $K \geq -r^2$, $r > 0$. Sei

$$k := C(4r)^{1/2}.$$

Sei Y ein Jacobifeld in M längs einer Geodätischen $c: R \rightarrow M$, $Y(0) = 0$ und $Y \perp c'$. Ebenso sei \tilde{Y} ein Jacobifeld längs $\tilde{c}: R \rightarrow P_k$ mit Anfangspunkt $\tilde{c}(0)$ im Scheitel $\sigma \in P_k$, $\tilde{Y}(0) = 0$ und $\tilde{Y} \perp \tilde{c}'$. Es gelte

$$\|Y'(0)\| = \|\tilde{Y}'(0)\|.$$

Beh.: $\|Y(t)\| > \|\tilde{Y}(t)\|$ für alle $t > T = \operatorname{arccoth}(2)/r$.

Bew.: Wir berechnen das Wachstum von Y und vergleichen es mit dem Ergebnis von 314. Sei $\tilde{c}'(0) =: \tilde{v} \in S_{\sigma} P_k$, dann ist

$$\tilde{Y}(t) = \exp_{\sigma} \frac{d}{du} (t\tilde{v} + u\tilde{Y}'(0)).$$

Da \exp_{σ} eine Sphäre vom Radius t um den Ursprung von $T_{\sigma} P_k$ auf die Sphäre vom euklidischen Radius $R(t)$ in $P_k \subset R^{n+2}$ abbildet, ist $Y(t)$ Tangentialvektor dieser Kugel von der Länge

$$\|Y(t)\| = R(t)\|Y'(0)\|.$$

Sei die Höhe

$$h(t) = k^2 R(t)^2,$$

die letzte Komponente der Einbettung e. Da stets gilt

$$\varphi(R) > k^2 R^2 = h(\varphi),$$

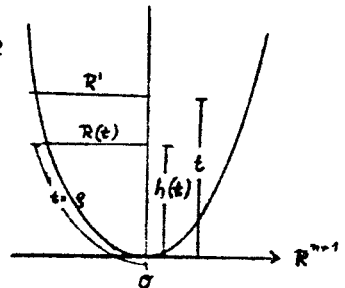
ist der zur Höhe t gehörige Radius

$$R' := t^{1/2} k^{-1}$$

größer als der zur Bogenlänge t und damit zu einer kleineren Höhe h(t) gehörige Radius R(t). Es gilt somit nach 314

$$\|\tilde{Y}(t)\| = R(t)\|\tilde{Y}'(0)\| < t^{1/2} k^{-1}\|Y'(0)\| < \|Y(t)\|,$$

falls $t > T$. □



353. Daraus ergibt sich ein Längenvergleichssatz (analog [12], S.179):

Satz: Sei wieder M eine Mannigfaltigkeit mit beschränkter Asymptote (Schranke C) und beschränkter Krümmung (Schranke $-r^2$).

Sei für ein $p \in M$ eine Isometrie $i: T_p M \rightarrow T_{O_p} P_k$ gegeben; $k = C \cdot (4r)^{1/2}$ wie oben.

Beh.: Für alle $w \in T_v T_p M$, $v \in T_p M$ mit $\|v\| > T$, gilt:

$$\|\exp_{p*} w\| > \|\exp_{O_p*} i_* w\|$$

und also für jede Kurve $b: [0,1] \rightarrow T_p M \setminus B_T(0)$:

$$L(\exp_p \circ b) > L(\exp_{O_p} \circ i \circ c)$$

Insbesondere gilt für alle $v, x \in T_p M \setminus B_T(0)$:

$$|\exp_p(v), \exp_p(x)| > |\exp_{O_p}(iv), \exp_{O_p}(ix)|$$

Bew.: $w \in T_v T_p M$ läßt sich zerlegen in einen radialen Anteil w_r und einen Anteil w_t , der tangential zur Sphäre $S_{\|v\|}(0)$ in $T_p M$ liegt. Weil \exp_p und \exp_{O_p} radiale Isometrien sind (Gauß-Lemma), wird die Länge des Anteils w_r weder bei Exponenzieren auf M noch (vermöge i) auf P_k verändert. Der Tangentialanteil $w_t = (z, 0)$ bestimmt durch Exponenzieren ein senkrechtes Jacobifeld J längs c_v mit $J(0) = 0$, $J'(0) = z$. Für dieses gilt der Vergleichssatz für Jacobifelder, 352.

Also

$$\begin{aligned} \|\exp_{p*} w\|^2 &= \|\exp_{p*} w_r\|^2 + \|\exp_{p*} w_t\|^2 \\ &> \|\exp_{O_p*} i_* w_r\|^2 + \|\exp_{O_p*} i_* w_t\|^2 \\ &= \|\exp_{O_p*} i_* w\|^2 \end{aligned}$$

Die Abschätzung für Kurvenlängen folgt durch Aufintegrieren.

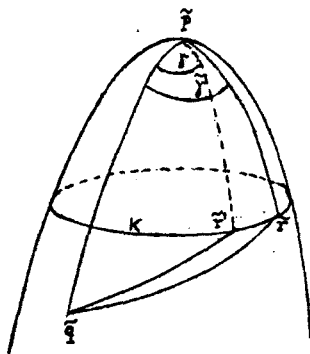
354. Schließlich erhalten wir auch einen Winkelvergleichssatz:

Satz: Sei wie oben M eine Mannigfaltigkeit mit beschränkter Asymptote und beschränkter Krümmung (Schranken C , $-r^2$). Seien $p, q, r \in M$; q und r seien von p um mindestens T entfernt. Seien $\tilde{p} = \sigma$, $\tilde{q}, \tilde{r} \in P_k$ mit $k = C \cdot (4r)^{1/2}$ Vergleichspunkte,

die ein Dreieck gleicher Kantenlänge wie $\Delta(p,q,r)$ aufspannen; γ bzw. $\tilde{\gamma}$ seien die Winkel bei p bzw. \tilde{p} .

Beh.: $\gamma < \tilde{\gamma}$.

Bew.:



Sei $\sigma \text{BdA } |p,q| > |p,r|$.

Wir betrachten die durch $\sigma = \tilde{p}$, \tilde{q} und \tilde{r} aufgespannte total geodätische Fläche in P_K . Auf dieser tragen wir von der Strecke $\tilde{p}\tilde{q}$ unter dem Winkel γ bei \tilde{p} die Strecke der Länge $|\tilde{p},\tilde{r}|$ ab. Der Endpunkt dieser Strecke sei \tilde{r}' . Nach dem Streckenvergleichssatz

353 ist

$$|\tilde{r}',\tilde{q}| < |r,q| = |\tilde{r},\tilde{q}|.$$

r und r' liegen nach Konstruktion beide auf demselben Kreis K mit Mittelpunkt p ; dieser schneidet die Strecke $\tilde{p}\tilde{q}$, etwa im Punkte s . Wir parametrisieren K nach dem Winkel bei \tilde{p} mit Anfang $K(0) = s$. Die Funktion $f(u) := d(q,K(u))$ besitzt im Intervall $-\pi < u < +\pi$ nur ein Extremum: bei $u = 0$. Denn eine Geodätische von \tilde{q} zu einem zweiten Extrempunkt würde K dort senkrecht schneiden und ließe sich zu einer Geodätischen von \tilde{q} nach \tilde{p} fortsetzen, was aber nicht sein kann, da $\tilde{p} = \sigma$ ein Pol ist. Da $K(\pi)$ sicher weiter von q entfernt ist als $K(0)$, hat f bei $u = 0$ sein einziges Minimum und wächst monoton mit $|u|$ für $-\pi < u < +\pi$. Der Punkt $\tilde{r}' = K(\gamma)$ kann somit nur dann näher an \tilde{q} liegen als $\tilde{r} = K(\tilde{\gamma})$, wenn $\gamma < \tilde{\gamma}$ ist. \square

4. Mannigfaltigkeiten ohne Fokalpunkte

4.1 Konvexität

411. Sei im Folgenden zunächst M eine beliebige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Der folgende Begriff spielt eine wichtige Rolle für die Klasse von Mannigfaltigkeiten, die wir in diesem Kapitel betrachten wollen.

Def.: Eine stetige Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt konvex, wenn für jede Geodätische $c: \mathbb{R} \rightarrow M$ die Abbildung $f \circ c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ im gewöhnlichen Sinne konvex ist: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $0 \leq u \leq 1$ gilt

$$f \circ c(a + u(b - a)) \leq f \circ c(a) + u[f \circ c(b) - f \circ c(a)] \dots$$

Satz: ($[4]$) Ist $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^2 -Funktion, so gilt:
 f ist genau dann konvex, wenn die Hessesche f_{**} überall positiv semidefinit ist.

Bew.: Ist $f \circ c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für alle Geodätischen c konvex und C^2 -differenzierbar, so ist $(f \circ c)'' \geq 0$. Andererseits ist

$$(f \circ c)''(0) = \langle f_{**} v, v \rangle$$

für $v = c'(0)$ (vgl 151, 2.), womit die eine Richtung gezeigt ist. Geht man von der Hesseschen aus, so ist

$$(f \circ c_v)'' \geq 0 \quad \text{für alle } v \in SM$$

und damit $f \circ c_v$ konvex. □

412. Sei M jetzt einfach zusammenhängend (es) und ohne konjugierte Punkte (OK).

Def.: Eine Teilmenge $B \subset M$ heißt konvex, wenn mit $p, q \in B$ auch die ganze Strecke von p nach q in B liegt.

Ist $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so beranden die Niveaulflächen $f^{-1}(r)$ für alle $r \in \mathbb{R}$ die abgeschlossenen Teilmengen

$$M^r := \{p \in M \mid f(p) \leq r\}.$$

Satz: Ist $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und konvex, so sind die Teilmengen $M^r \subset M$ konvex für alle $r \in \mathbb{R}$.

Bew.: Sind $p, q \in M^r$ und $c: [a, b] \rightarrow M$ die Strecke von p nach q , so ist wegen der Konvexität für alle $u \in [0, 1]$

$$f(c(a + u(b - a))) \leq r,$$

also $f(c(t)) \leq r$ für alle $t \in [a, b]$. □

413. Wie sieht die berandende Hyperfläche einer konvexen Umgebung aus?

Satz: Sei M einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit ohne konjugierte Punkte, B eine konvexe, abgeschlossene Umgebung in M mit C^2 -differenzierbarem Rand $\partial B =: H$.

Beh.: Der II. Fundamentaltensor A_H von H bezüglich der nach innen gerichteten Normale ist überall positiv semi-definit.

Bew.: Sei $p \in H$, dann berührt H die "Stützebene" $S := \exp_p T_p H$ in p ; S bleibt wegen der Konvexität von B ganz auf der äußeren Seite von H . In dem folgenden Lemma zeigen wir $A_S(p) = 0$, dann folgt die Behauptung aus 155. □

Lemma: Sei $E \subset T_p M$ eine orientierte Hyperebene, $S := \exp_p E$. Dann ist $A_S(p) = 0$.

Bew.: Sei v der Normalenvektor zu E in $T_p M$, $c_0 := c_v$ die zugehörige Geodätische. Für jeden Vektor $x \in E$ liegt die Geodätische $c_x(s)$ in der Hyperfläche S . $c_s(t)$ sei die Geodätische mit $c_s(0) = c_x(s)$, die tangential zum Norma-

lenvektor auf S startet. Dann ist $a(s, t) := c_s(t)$ eine 1-Parameter-Variation von Geodätischen mit Jacobifeldern

$$J_s(t) := \frac{\partial a}{\partial s}(s, t) \quad ,$$

und es gilt

$$\begin{aligned} \langle J_s, J'_s \rangle &= \langle J_s, \frac{D}{dt} \frac{\partial a}{\partial s} \rangle = \langle J_s, \frac{D}{ds} \frac{\partial a}{\partial t} \rangle \\ &= \frac{d}{ds} \langle J_s, c'_s \rangle - \langle \frac{D}{ds} \frac{\partial a}{\partial s}, c'_s \rangle \quad . \end{aligned}$$

Der erste Term rechts verschwindet für alle s und t , weil J_s überall senkrecht auf c_s steht, der zweite ist bei $t = 0$ Null für alle $s \in \mathbb{R}$, weil die Kurve $s \mapsto a(s, 0)$ gerade die Geodätische c_x ist. Also ist speziell für $s = 0$:

$$\langle J_0(0), J'_0(0) \rangle = 0 \quad .$$

Das Flußtensorfeld der Normalenkongruenz von S mit Anfangswert 1 längs der Geodätischen c_v wollen wir $B(t)$ nennen.

Dann ist $J_0(t) = B(t)x$, also

$$\langle B'(0)x, x \rangle = 0 \quad .$$

Da dies für alle $x \in E = T_p S$ richtig ist, verschwindet der symmetrische Tensor $B'(0) = B'B^{-1}(0) = -A_S(p)$. \square

Wir bemerken außerdem, daß der in 144 (S. 24) definierte Lagrange-Tensor B_v mit den Anfangsdaten $B_v(0) = 1$, $B'_v(0) = 0$ gerade der Flußtensor der Normalenkongruenz der Hyperfläche $S_v = \exp_p([v]^\perp)$ längs der Geodätischen c_v ist für alle $p \in M$ und $v \in S_p M$.

4.2 Jacobifelder und Abstandsfunktion

421. Das folgende Theorem gibt eine Reihe äquivalenter Bedingungen, die die Klasse der Mannigfaltigkeiten ohne Fokalfunkte kennzeichnen, die wir im Folgenden untersuchen wollen.

Theorem 11 Sei M eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit ohne konjugierte Punkte. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) Für jeden Punkt $p \in M$ ist die Abstandsfunktion d_p ,
 $d_p(q) := d(p, q)$, konvex.
- (ii) Alle abgeschlossenen Bälle $B_r(p)$ mit Mittelpunkt
 $p \in M$ und Radius $r > 0$ sind konvex.
- (iii) $D'_{sv}(0) < 0$ für alle $v \in SM$ und $s > 0$.
- (iv) $A_v^{-1} A_v^{-1}(t) > 0$ für alle $v \in SM$ und $t > 0$.
- (v) Für alle Jacobifelder $J \neq 0$ auf M gilt: Falls
 $J(0) = 0$, ist
 $\langle J, J \rangle'(t) > 0$ für alle $t > 0$.
- (vi) Für alle Jacobifelder J auf M gilt: Falls $J(0) \neq 0$
und $J'(0) = 0$, so folgt
 $J(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
- (vii) Das Jacobitensorfeld B mit den Anfangsdaten $B(0) = 1$,
 $B'(0) = 0$ ist nirgends auf $SM \times \mathbb{R}$ singular.
- (viii) Für jeden Vektor $v \in SM$ hat die Hyperfläche $S_v =$
 $\exp_{qv}([v]^\perp)$ keine Fokuspunkte auf c_v .

Bew.: (i) \Rightarrow (ii) nach 412.

(ii) \Rightarrow (iii): Nach 144 ist $-D'_{sv}(0)$ II. Fundamentaltensor
der Hyperfläche $\partial B_s(c_v(s))$ mit innerer Normale, also (413):

$$D'_{sv}(0) \leq 0 \quad \text{für alle } v \in SM, s > 0.$$

Wäre nun für ein $v \in SM$, $s > 0$ und $x \in N_{0c_v}$

$$\langle D'_{sv}(0)x, x \rangle = 0,$$

so müßte für $r > s$ gelten (132):

$$\langle D'_{rv}(0)x, x \rangle = \left\langle \left[D'_{sv}(0) + \int_s^r (A''A)^{-1}(u) du \right] x, x \right\rangle > 0.$$

Widerspruch!

(iii) \Rightarrow (iv): Nach 142 und 144 ist $A_v^{-1} A_v^{-1}(t)$ für $t > 0$

der II. Fundamentaltensor von $\partial B_t(rv)$ im Punkte $c_v(t)$.

Dieser wird auch durch $D'_{-t, v(t)}(0) = -D'_{t, -v(t)}(0)$ gegeben,
falls $v(t) := \phi_t v$, und ist daher nach (iii) positiv definit.

(iv) \Rightarrow (v): Mit $A'A^{-1}$ ist auch $A''(A'A^{-1})A = A''A'$ posi-

tiv definit. Sei $J \neq 0$ ein Jacobifeld längs c_v mit $J(0) = 0$. oBdA stehe J senkrecht auf c_v , denn der tangentielle Anteil ist linear in t . Dann gibt es ein $x \in N_0 c_v$, $x \neq 0$ mit $J = A_v x$, also

$$\langle J(t), J'(t) \rangle = \langle A_v^* A_v'(t) x, x \rangle > 0$$

für alle $t > 0$, und $\langle J, J' \rangle' = 2 \langle J, J' \rangle$.

(v) \Rightarrow (vi) : Ist J wie in (vi) vorausgesetzt und $J(t_0) = 0$

für ein $t_0 \in \mathbb{R}$, so ist nach (v)

$$\langle J, J' \rangle(0) \begin{cases} < 0 & \text{für } t_0 > 0 \\ > 0 & \text{für } t_0 < 0 \end{cases},$$

also ist in jedem Fall $J'(0) \neq 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

(vi) \Rightarrow (vii) : Die Jacobifelder der Form Bx erfüllen die Voraussetzung von (vi) für $x \neq 0$, also ist $B(t)x \neq 0$ für alle $x \neq 0$ und alle $t \in \mathbb{R}$.

(vii) \Rightarrow (viii) : B_v ist längs c_v Flußtensorfeld der Normalenkongruenz von S_v . Ein Fokuspunkt von S_v auf c_v wäre nach Definition eine Singularität von B_v .

(viii) \Rightarrow (i) : Sei $p \in M$ beliebig; wir wollen die Konvexität von d_p nachweisen. Sicher ist d_p in der Nähe von p konvex, sei also $q \neq p$. Dort ist d_p C^∞ -differenzierbar, und wir können die Hessesche $d_{p^{**}}$ berechnen. Sei $c = c_v$ die Verbindungsgeodätische von q nach p , $v \in S_q M$. Weil die Hyperfläche S_v nach (viii) keine Fokuspunkte auf c_v hat, ist c_v lokal kürzeste von p nach S_v (143). S_v liegt somit nahe bei q ganz außerhalb des offenen Balles B um p mit Radius $|p, q|$. Nach 155 ist

$$A_{\partial B}(q) > A_{S_v}(q) = 0.$$

$\text{grad } d_p$ ist das nach außen gerichtete, zu p radiale Feld, bei q also das äußere Einheitsnormalvektorfeld auf ∂B . Also

$$d_{p^{**}}(q) = \nabla \text{grad } d_p(q) = A_{\partial B}(q) > 0$$

nach 142, und d_p ist konvex.

422. Jetzt können wir endlich unsere Klasse von Mannigfaltigkeiten definieren:

Def.: Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Ein Fokelpunkt auf einer Geodätischen $c: \mathbb{R} \rightarrow M$ ist eine Singularität des Jacobitensors B auf c . M heißt Mannigfaltigkeit ohne Fokelpunkte (OF), wenn M zusammenhängend und vollständig ist und auf keiner Geodätischen in M Fokelpunkte vorkommen.

Satz: Sei M eine Mannigfaltigkeit ohne Fokelpunkte. Dann ist M ohne konjugierte Punkte, und die lokalen Eigenschaften (iii) - (viii) in 421 treffen auf M zu. Ist M überdies einfach zusammenhängend, so gelten alle Aussagen in 421.

Bew.: Durch Nachrechnen der Anfangsbedingungen sehen wir, daß nach 122 der Jacobitensor A auf folgende Weise durch B beschrieben werden kann:

$$A(t) = B(t) \cdot \int_0^t (B^*B)^{-1}(u) du$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Da der erste Faktor nirgends singulär ist und der zweite für positive t positiv und für negative t negativ definit ist, ist $A(t)$ für kein $t \neq 0$ singulär und damit M ohne konjugierte Punkte. Auf der universellen Überlagerung gelten also mit (vii) auch alle anderen Bedingungen von 421. Die Eigenschaften (iii) - (viii) sind von lokaler Natur und setzen sich daher auf die Mannigfaltigkeit M selber fort. \square

Beispiele von OF-Mannigfaltigkeiten bilden die Mannigfaltigkeiten nichtpositiver Krümmung. Dort gilt sogar für jedes Jacobifeld J längs einer Geodätischen c :

$$\langle J, J \rangle'' = 2\langle J', J' \rangle - 2\langle R(J, c')c', J \rangle > 0.$$

Die Längenfunktion jedes Jacobifeldes ist also konvex; insbesondere ist die eines bei $t = 0$ verschwindenden Feldes mit t monoton wachsend samt ihrer Ableitung, und (v) ist erfüllt.

423. Wir wollen nun die Asymptotische Lösung betrachten.

Satz: Sei M eine Mannigfaltigkeit ohne Fokalkunkte. Dann ist $D_v D_v^{-1}(t)$ negativ semidefinit für alle $t \in \mathbb{R}$, $v \in SM$. Jedes asymptotische Jacobifeld $J = Dx$ hat auf ganz \mathbb{R} monoton fallende Länge. M ist Mannigfaltigkeit beschränkter Asymptote mit Schranke $C = 1$.

Bew.: Sei c_v eine Geodätische in M und $v(t) = c'_v(t)$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $D'_v(t)(0) = \lim_{s \rightarrow 0} D'_{s,v}(t)(0)$ negativ semidefinit nach 421 (iii). Laut 133 ist dann für alle $t \in \mathbb{R}$

$$D'_v(t) = D'_v(t)(0) \cdot D_v(t),$$

also

$$D'_v D_v^{-1}(t) = D'_v(t)(0) \leq 0.$$

Mit $D'_v D_v^{-1}$ ist auch $D^*(D'_v D_v^{-1})D = D^* D'$ negativ semidefinit, also gilt für ein Jacobifeld der Form $J = Dx$:

$$\langle J, J \rangle' = 2 \langle D'x, Dx \rangle = 2 \langle D^* D'x, x \rangle \leq 0.$$

$\|D(t)\| = \max \{D(t)x; \|x\| = 1\}$ nimmt also für den Bereich $t > 0$ sein Maximum bei $t = 0$ an, da die Funktionen $\|D(t)x\|^2$ für alle x monoton fallend sind. D.h. aber

$$\|D(t)\| \leq 1 \quad \text{für alle } t > 0.$$

424. Nach 421 (ii) sind auf einfach zusammenhängenden OF-Mannigfaltigkeiten alle Bälle konvex, also auch die in 331 definierten Horodisks

$$B_v = \bigcup_{t > 0} B_t(c_v(t)).$$

Setzt man noch zusätzlich UD voraus (was, wie wir gesehen haben, bei beschränkter oder nichtpositiver Krümmung erfüllt ist), so sind

nach 341 die Horosphären $H_v = \partial B_v$ C^2 -differenzierbar und nur von dem durch c_v bestimmten uneigentlichen Punkt in $L(M)$ abhängig. Die Konvexität ist das Hauptargument für den folgenden Satz, der unabhängig von dieser Arbeit auch von O'SULLIVAN ([24]) bewiesen wurde:

Theorem 12 (Flacher-Streifen-Satz) M sei eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit ohne Fokuspunkte mit uniformer Divergenz. $c_0, c: \mathbb{R} \rightarrow M$ seien zwei Geodätische mit uniform beschränktem Abstand $|c(t), c_0(t)| \leq k$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Beh.: Bild $c_0 \cup$ Bild c ist der Rand einer total geodätischen flachen Fläche (isometrisch eingebettet)

$$F: [0, a] \times \mathbb{R} \rightarrow M.$$

Bew.: Sei $v(t) := c'_0(t)$. Nach 342 trifft auch die andere Geodätische c einen Berührungspunkt von $H_{v(0)}$ und $H_{-v(0)}$, oBdA bei $c(0)$. Die Berührungpunktmenge

$$H_{v(0)} \cap H_{-v(0)} = B_{v(0)} \cap B_{-v(0)}$$

ist zusammenhängend und konvex. Die Geodätische g_0 von $c_0(0)$ nach $c(0)$ liegt demnach in $H_{v(0)} \cap H_{-v(0)}$, schneidet also c_0 und c beide orthogonal. Das gleiche gilt für die Geodätische g_t von $c_0(t)$ nach $c(t)$; diese liegt in $H_{v(t)} \cap H_{-v(t)}$. So ist die Abstandsfunktion von c_0 nach c an jeder Stelle von c_0 stationär, also konstant, etwa gleich $a > 0$.

Andererseits haben wir die Geodätischen c_s für $0 \leq s \leq a$, das sind die orthogonalen Trajektorien von $H_{v(0)}$ im Punkte $g_0(s)$. Mit diesen wird die Fläche wie in Folgerung 342 definiert: $F(s, t) := c_s(t)$. Die Kurven $F_t(s) := F(s, t)$ können auf Grund von 423 nicht länger sein als $g_0 = F_0$, denn

$$\begin{aligned} L(F_t) &= \int_0^a \left\| \frac{\partial}{\partial s} F(t, s) \right\| ds = \int_0^a \left\| D_{c_s'(0)}(t) \frac{d}{ds} g_0(s) \right\| ds \\ &\leq \int_0^a \left\| \frac{d}{ds} g_0(s) \right\| ds = a \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Andererseits verbindet die Kurve F_t die Punkte $c_0(t)$ und $c(t) = c_a(t)$ vom Abstand a miteinander, daher ist

$$L(F_t) = a \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R},$$

und F_t ist die Geodätische g_t von $c_0(t)$ nach $c(t)$.

Die Fläche F wird also von zwei zueinander transversalen Scharen von Geodätischen überdeckt, g_t und c_s . Außerdem sehen wir, daß die Länge der Jacobifelder

$$J_s(t) := \frac{\partial}{\partial s} F(t, s) = \frac{d}{ds} g_t(s)$$

für alle $s \in [0, a]$ und alle $t \in \mathbb{R}$ konstant gleich 1 ist

Nach dem untenstehenden Lemma ist J_s damit parallel längs c_s . Wir berechnen die II. Fundamentalform α der Fläche F (vgl. etwa [20]), den Normalanteil der kovarianten Ableitung von Tangentialfeldern der Fläche:

$$\alpha\left(\frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial s}\right) = \alpha\left(\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial t}\right) = 0,$$

weil $\frac{\partial F}{\partial s}$ und $\frac{\partial F}{\partial t}$ Tangentialvektoren von Geodätischen sind, und

$$\alpha\left(\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial s}\right) = 0,$$

weil die J_s Parallelfelder sind. Somit ist F total geodätisch in M , und wegen

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle = 0, \quad \left\| \frac{\partial F}{\partial s} \right\| = \left\| \frac{\partial F}{\partial t} \right\| = 1$$

ist F isometrische Einbettung des flachen Streifens $[0, a] \times \mathbb{R}$ in M . □

Lemma: (EBERLEIN [6]) Sei M eine Mannigfaltigkeit ohne Fokalkpunkte, mit unten beschränkter Krümmung. J sei ein Jacobifeld beschränkter Länge auf einer vollständigen Geodätischen $c : \mathbb{R} \rightarrow M$. Dann ist J parallel längs c .

Bew.: Wegen 214 kann es nur ein beschränktes Jacobifeld mit Anfang $J(0)$ auf $c|_{[0,\infty)}$ geben, also ist J stabil, d.h. es gibt einen Vektor $x \in N_0 c$ so, daß $J(t) = D(t)x$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Nach 423 hat J dann konstante Länge, da für den negativen Halbstrahl dasselbe richtig ist. Es gilt also für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\langle D'(t)x, D(t)x \rangle = \langle J, J \rangle'(t) = 0.$$

Damit gilt für $y(t) := D(t)x$

$$\langle (D'D^{-1})(t)y(t), y(t) \rangle = 0,$$

und weil nach 423 $(D'D^{-1})(t) \leq 0$, gilt

$$J'(t) = D'(t)(D^{-1}(t)y(t)) = 0,$$

woraus die Behauptung folgt. \square

Korollar: Voraussetzungen über M wie oben (OF, UD). Dann ist für jeden Vektor $v \in SM$ die Menge $Z_v := H_v \cap H_{-v}$ konvex, und es gibt eine total geodätische isometrische Einbettung

$$Z_v \times \mathbb{R} \rightarrow M.$$

Bew.: Die Einbettung wird für alle $p \in G_v$, $t \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$(p, t) \mapsto c_p(t),$$

wo c_p die Asymptote zu c_v ist mit $c_p(0) = p$.

425. Wir wollen schließlich noch die Blätterung 341 betrachten:

Satz: Sei M einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit ohne Fokaldunkte mit uniformer Divergenz. Dann gilt:

- (i) Für alle $v \in SM$ ist die Busemann-Funktion b_v , d.h. die Normalfunktion der Horosphäre H_v , konvex.
- (ii) Der Abstand zwischen zwei asymptotischen Strahlen ist entweder streng monoton fallend oder konstant.

Bew.: Zu (i): Es war definiert (vgl. S.64)

$$b_v(q) = \lim_{t \rightarrow \infty} (|q, c_v(t)| - t) = \lim (d_{c_v(t)}(q) - t)$$

b_v ist also Limes der konvexen Funktionen $e_t = d_{c_v(t)} - t$ und damit konvex.

Zu (ii): Wird der Abstand zwischen zwei asymptotischen Strahlen r und s irgendwo stationär, oBdA bei $r(0)$, so steht dort die Verbindungsgeodätische c auf r und s senkrecht, und die Abbildung $b_v \circ c : R \rightarrow R$ hat bei den Schnittpunkten von c mit r und s Extrema, denn dort berührt c Niveauflächen von b_v . Wegen der Konvexität muß $b_v \circ c$ dazwischen konstant sein, also liegt der Abschnitt von c zwischen r und s ganz in H_v und ebenso in H_{-v} , da das Argument auch für $-v$ anstatt v gültig ist. Nach 424 ist der Abstand zwischen r und s also konstant.

Ist der Abstand zwischen r und s nirgendwo stationär, kann er auch nicht streng monoton wachsend sein, denn weil OK die Eigenschaft BA und damit UK (unendliche Konvergenz) nach sich zieht, ist der Abstand zwischen $r(t)$ und s für positive t beschränkt, wäre somit überhaupt beschränkt und nach 424 wieder konstant. Also muß der Abstand von r nach s streng monoton fallend sein, wenn er nicht konstant ist. \square

4.3 Isometrien und Fundamentalgruppe

431. In den nächst folgenden Abschnitten sollen Ergebnisse verallgemeinert werden, die GROMOLL und WOLF ([12]) sowie YAU ([27], [28]) für Mannigfaltigkeiten nichtpositiver Krümmung bewiesen haben. Unabhängig von der vorliegenden Arbeit gewann O'SULLIVAN die gleichen Resultate ([23], [24]). Aus algebraischen Eigenschaften der Fundamentalgruppe einer OF-Mannigfaltigkeit sollen geometrische Folgerungen gezogen werden. Dazu ist das Verhalten von Isometrien auf einfach zusammenhängenden OF-Mannigfaltigkeiten zu untersuchen.

Def.: Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine Untergruppe G der Isometriegruppe $I(M)$ heißt eigentlich diskontinuierlich, wenn für jeden Punkt $p \in M$ eine Umgebung $U(p)$ existiert, so daß

$$U \cap gU = \emptyset \quad \text{für alle } g \in G, g \neq 1.$$

M heißt kompakt homogen unter der Gruppe $G \subset I(M)$, wenn M zusammenhängend und vollständig ist und die Gruppe G eigentlich diskontinuierlich ist mit kompaktem Orbitraum M/G .

(Abkürzung: M ist KH unter G .)

Kompakt homogen sind nach dieser Definition genau die kompakten, vollständigen, zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten und ihre Überlagerungen. Ist M einfach zusammenhängend, so ist M universelle Überlagerung von M/G , und G ist die Fundamentalgruppe von M/G . Allgemein ist G eine Faktorgruppe der Fundamentalgruppe von M/G .

Def.: Ist $g \in I(M)$, so betrachten wir die Verschiebungsfunktion

$$d_g : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_g(p) := |p, gp|.$$

Die Minimalmenge C_g von g ist die Teilmenge von M , auf der die Verschiebungsfunktion d_g ihr Minimum annimmt.

Die Verschiebungsfunktion einer Isometrie ist außerhalb von Fixpunkten C^∞ -differenzierbar. Der folgende Satz sichert die Existenz der Minimalmengen auf KH-Mannigfaltigkeiten.

Satz: Sei M kompakt homogen unter G . Dann besitzt die Verschiebungsfunktion d_g ein Minimum für alle $g \in G$. (Vgl. [25])

Bew.: Sei $m := \inf d_g \geq 0$ und $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Punktfolge in M mit $\lim_{n \rightarrow \infty} d_g(p_n) = m$. Nach Übergang zu einer Teilfolge der (p_n) existiert wegen KH eine Folge von Isometrien $g_n \in G$, so daß die Punktfolge $(g_n(p_n))$ konvergiert; sei

$$q := \lim_{n \rightarrow \infty} g_n p_n.$$

Wir betrachten die Verschiebungsfunktionen der Konjugierten von g mit den g_n :

$$|(g_n g g_n^{-1}) g_n p_n, g_n p_n| = |g p_n, p_n| \rightarrow m.$$

Kürzen wir ab: $g_n g g_n^{-1} =: g'_n$, dann ist

$$\begin{aligned} |g'_n q, q| &< |g'_n q, g'_n g_n p_n| + |g'_n g_n p_n, g_n p_n| + |g_n p_n, q| \\ &= 2 |g_n p_n, q| + |g p_n, p_n| \rightarrow m. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $|g'_n q, q|$ beschränkt für alle n , und somit konvergiert eine Teilfolge von $(g'_n q)$, die wir wieder ebenso bezeichnen. Weil G aber eigentlich diskontinuierlich ist, müssen die g'_n alle bis auf endlich viele gleich sein; oBdA

$$g'_n = g'_1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann nimmt d_g bei $g_1^{-1} q$ sein Minimum an, denn

$$\begin{aligned} d_g(g_1^{-1} q) &= \lim_{n \rightarrow \infty} d_g(g_1^{-1} g_n p_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |g_1 g g_1^{-1} g_n p_n, g_n p_n| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |g'_1 g_n p_n, g_n p_n| \\ &= m. \end{aligned}$$

Def.: Eine unter einer Isometrie g invariante Geodätische nennen wir Achse von g .

Lemma: Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, zusammenhängend und vollständig. Sei $g \in I(M)$.

Beh.: Die Minimalmenge C_g ist die Vereinigung aller Achsen von g .

Bew.: Ist $p \in C_g$, so ist die Geodätische h von p durch $g p$ Achse. Denn für einen Punkt $h(t)$ zwischen p und $g p$ gilt:

$$|h(t), g h(t)| < |h(t), g p| + |g p, g h(t)| = |p, g p|,$$

andererseits, da $p \in C_g$,

$$|h(t), g h(t)| > |p, g p|.$$

Also ist die erste Ungleichung in Wirklichkeit eine Gleichung, und $g p$ liegt auf der Strecke von $h(t)$ nach $g h(t)$; die Punkte

$p, h(t), gp, gh(t)$ sind also alle kollinear, und h ist invariant unter g . Ist umgekehrt \hat{h} eine Achse von g , $\hat{h}(0) = q$, so ist d_g bei q minimal. Ist nämlich wie vorher h die Geodätische von $p \in C_g$ durch gp , wie wir sahen eine Achse, so ist

$$\begin{aligned} |q, gq| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |q, g^n q| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (|q, p| + |p, g^n p| + |g^n p, g^n q|) \\ &= |p, gp| \end{aligned}$$

und damit minimal. \square

432. Wir kehren zu den Mannigfaltigkeiten ohne Fokalpunkten zurück. Natürlich hat eine KH-Mannigfaltigkeit beschränkte Krümmung; wir können also alle unsere Ergebnisse aus 4.2 anwenden.

Satz: Sei M eine kompakt homogene Mannigfaltigkeit ohne Fokalpunkte mit Gruppe G ; M sei einfach zusammenhängend.

Beh.: Die Minimalmenge jeder Isometrie $g \in G$ ist konvex und von der Form $C_g = Z \times \mathbb{R}$ mit einer konvexen Menge Z in M (total geodätische, isometrische Einbettung).

Bew.: Durch jeden Punkt $p \in C_g$ gibt es eine Achse h_p von g . Zwei derartige Achse h_p und h_q haben beschränkten Abstand voneinander, spannen also nach 424 einen flachen, total geodätischen Streifen konstanter Breite zwischen sich auf, der ebenfalls g -invariant ist. Alle Parallelen in diesem Streifen sind also auch Achsen. Insgesamt erhalten wir

$$C_g = \bigcup_{p \in H} \text{Bild } h_p = Z \times \mathbb{R}$$

mit

$$Z := H_{h_p'}(0) \cap H_{-h_p'}(0) = Z_{h_p'}(0),$$

und H ist konvex. \square

433. Der nächste Satz macht eine Reichhaltigkeitsaussage über C_g .

Satz: M sei eine kompakt homogene, einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit ohne Pokalpunkte mit Gruppe G . Sei $g \in G$ und $C \subset M$ eine konvexe, abgeschlossene, g -invariante Menge.

Beh.: $C \cap C_g \neq \emptyset$.

Bew.: Sei $q \in C_g$ und h_q die Achse von g durch q . Weil C g -invariant ist, nimmt die Funktion

$$f(t) = d(h_q(t), C)$$

alle ihre Werte schon auf dem kompakten Intervall an, das von h_q auf die Strecke von q nach gq abgebildet wird; sie besitzt demnach ein Minimum m , etwa bei t_0 . Der nächste Punkt von C an $h_q(t_0) =: q_0$ sei $p \in C$. Wir betrachten die Strecken s_n von p nach $g^n p$; da C konvex und g -invariant ist, verlaufen sie in C und haben daher an den beiden Endpunkten die minimale Distanz m zur Achse h_q . Die Folge $(g^n p)_{n \in \mathbb{N}}$ hat beschränkten Abstand von h_q . Ein Grenzstrahl hat somit wegen UK beschränkten Abstand von h_q und ist wegen UD echter Grenzstrahl. Die Strecken s_n konvergieren also gegen einen Strahl s , der nach 425 monoton fallenden Abstand $\leq m$ von h_q hat. Da andererseits die Strecken s_n alle Mindestabstand m von h_q haben, ist der Abstand von s nach h_q konstant gleich m , und s ist parallel zu h_q .

Wir hätten die gleiche Konstruktion auch ausgehend von $g^n p$ anstelle von p durchführen können und wären vielleicht zu einer anderen Parallelen zu h_q vom Abstand m gelangt, genannt s^n . Nach Konstruktion läge s^n ebenso wie s in der abgeschlossenen konvexen Menge C . Die Sphäre um q_0 mit Radius m berührt C jedoch genau in einem Punkt, da sie selbst eine strikt konvexe Menge berandet, nämlich im Punkt p . So muß denn s^n auch durch den Punkt p gehen und fällt daher

mit s zusammen. Und das heißt, daß s Achse von π ist und daher in $C \cap C_g$ verläuft. (Lemma 431)

Nachtrag: Wir nennen eine konvexe Menge S strikt konvex, wenn jede Geodätische den Rand von S höchstens in zwei Punkten schneidet. Eine Geodätische, die zweimal schneidet, muß demnach innere Punkte von S treffen. Die Bälle in einfach zusammenhängenden OF-Mannigfaltigkeiten haben gerade diese Eigenschaft, denn eine Geodätische, die ein Stück weit auf einer Sphäre verlief, würde den Mittelpunkt der Sphäre zu einem Fokalkpunkt erheben.

434. Wir kommen nun zum Hauptresultat dieses Abschnittes:

Theorem 13 Sei M eine einfach zusammenhängende, unter der Gruppe $G \subset I(M)$ kompakt homogene Mannigfaltigkeit ohne Fokalkpunkte. Sei $A \subset G$ eine abelsche Untergruppe vom Rang k .

Beh.: M besitzt eine flache, total geodätische, A -invariante Untermannigfaltigkeit $E \cong \mathbb{R}^k$, auf der A als Gitter von Translationen operiert.

Bew.: Die Minimalmenge C_a eines jeden Elementes $a \in A$ ist invariant unter der ganzen Gruppe A . Sei nämlich $b \in A$, $p \in C_a$, dann ist die Verschiebungsfunktion bei bp minimal:

$$d_a(bp) = |abp, bp| = |bap, bp| = |ap, p| = \min d_a,$$

und somit $bp \in C_a$. Daraus folgt nach dem vorstehenden Satz 433, daß sich zwei Minimalmengen C_a und C_b schneiden für alle $a, b \in A$.

Sei a_1, \dots, a_k eine Basis für A . Wir betrachten die abgeschlossene konvexe Menge

$$C_A := C_{a_1} \cap \dots \cap C_{a_k} \neq \emptyset.$$

Sei $p \in C_A$ und h_1, \dots, h_k die Achsen der Isometrien a_1, \dots, a_k durch den Punkt p . Sei

$$Z_1 := H_{h_1}(0) \wedge \dots \wedge H_{-h_k}(0).$$

die Einbettung von Kor. 424 sei

$$e_i: Z_i \times R \rightarrow M.$$

Dann ist

$$C_A = \bigcup_{i=1}^k e_i(Z_i \times R).$$

Es gibt demnach k selbstparallele Vektorfelder

$$X_i := e_{i*} \left(\frac{d}{dt} \right)$$

auf C_A , weil die e_i total geodätische isometrische Einbettungen sind. Sie definieren eine selbstparallele Distribution auf C_A von einer Dimension $1 \leq k$. Diese Distribution ist nach dem Satz von FROBENIUS insbesondere integrierbar, da involutiv, und jedes Blatt ist total geodätisch, flach und vollständig in M , da es auf jedem Blatt 1 selbstparallele, linear unabhängige Vektorfelder gibt, oBdA X_1, \dots, X_k , deren Integralkurven vollständig sind, nämlich Achsen von a_1, \dots, a_k . Ein jedes Blatt E ist zudem A -invariant, da es aus Achsen der Erzeugenden von A besteht, und A ist Translationengruppe auf E . Weil A eigentlich diskontinuierlich auf E operiert und vom Rang k ist, muß $1 = k$ sein, und E ist isometrisches Bild des euklidischen Raumes R^k . \square

Kor.: Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit ohne Fokalfunkte. Die Fundamentalgruppe von M enthalte eine abelsche Untergruppe vom Rang k . Dann gibt es einen total geodätischen, flachen k -Torus in M . \square

Insbesondere haben wir mit Theorem 13 bewiesen, daß jede abelsche Untergruppe von G endlich erzeugt ist, denn anderenfalls könnten wir abelsche Untergruppen in G finden, deren Rang größer ist als die Dimension von M , was nach dem Satz unmöglich ist. (Elemente endlicher Ordnung in G sind unmöglich, da sie wegen 431 zu geschlossenen Geodätischen auf der einfach zusammenhängenden OF-Mannig-

faltigkeit führen würden.)

435. Die folgenden Überlegungen können wir aus YAUs Arbeiten über Mannigfaltigkeiten nichtpositiver Krümmung übernehmen ([27], [28]).

Lemma 1 Sei M eine einfach zusammenhängende, unter G kompakt homogene Mannigfaltigkeit ohne Fokuspunkte, A eine abelsche Untergruppe von G . Sei

$$N := \{g \in G \mid \forall a \in A \quad gag^{-1} \in A\}$$

der Normalisator und

$$C := \{g \in G \mid \forall a \in A \quad gag^{-1} = a\}$$

der Centralisator von A in G .

Beh.: N/C ist eine endliche Gruppe.

Bew.: Sei E der in 435 konstruierte A -invariante euklidische Unterraum von M . $o \in E$ ein fest gewählter Punkt. Jedes Element g von N bewirkt einen inneren Automorphismus auf A , also einen Gitterautomorphismus i_g auf A_0 :

$$i_g(o) := gag^{-1}o.$$

Wir wollen zeigen, daß i_g die Abstände zum Ursprung o des Gitters invariant läßt.

Die Isometrie g transportiert E in einen euklidischen Teilraum gE , der wegen der Normalisatoreigenschaft wieder A -invariant ist. A operiert also auch dort als Translationsgruppe. Wir betrachten für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $a \in A$ das Viereck $o, a^n o, go, a^n go$ in M . Nach der Vierecksungleichung ist

$$\begin{aligned} \left| |o, a^n o| - |go, a^n go| \right| &\leq |o, go| + |a^n o, a^n go| \\ &= 2 d_g(o), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \left| |o, ao| - |go, ago| \right| &= \frac{1}{n} \left| |o, a^n o| - |go, a^n go| \right| \\ &\leq 2 d_g(o) / n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Damit ist

$$|o, ao| = |go, ago| = |o, g^{-1} ago| ,$$

und g^{-1} erhält den o -Abstand der Gitterpunkte.

Von solchen Gitterautomorphismen kann es nur endlich viele geben. Denn wählt man eine Ball um o in E , in dem alle Erzeugenden $a_1 o, \dots, a_k o$ des Gitters liegen, so enthält dieser nur noch endlich viele weitere Gitterpunkte, die als Bilder der Erzeugenden unter einem o -Abstand-erhaltenden Gitterautomorphismus in Frage kommen. Es können demnach nur endlich viele Gitterautomorphismen von N herkommen; diese seien g_1, \dots, g_m . Für jedes $g \in N$ gibt es daher eine natürliche Zahl $1 \leq m$, so daß für alle $a \in A$

$$g a g^{-1} = g_1 a g_1^{-1} ,$$

also

$$(g_1^{-1} g) a (g_1^{-1} g)^{-1} = a .$$

Damit

$$g_1^{-1} g \in C ,$$

und g liegt in der Nebenklasse $g_1 C$. Es gibt demnach nur m verschiedene Nebenklassen von C in N , und N/C hat die Ordnung m . □

Lemma 2 Sei S eine auflösbare, torsionsfreie Gruppe mit folgenden Eigenschaften:

- (1) Jede abelsche Untergruppe ist endlich erzeugt.
- (2) Der Centralisator jeder abelschen Untergruppe hat endlichen Index im Normalisator dieser Gruppe.

Beh.: S ist endliche Erweiterung einer maximal abelschen Untergruppe, eine sog. Bieberbachgruppe.

Bew.: Satz 2.3.1. in [28] oder der Beweis von Theorem 1 in [27]. Da dieses Lemma rein gruppentheoretischer Natur ist, begnügen wir uns mit dem Literaturhinweis. □

Theorem 14 Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit ohne Fokelpunkte.

Dann ist jede auflösbare Untergruppe der Fundamentalgruppe von M eine Bieberbachgruppe. Ist die Fundamentalgruppe selbst auflösbar, so ist M flach.

Bew.: Die letzte Bemerkung in 434 und das Lemma 1 sichern die Voraussetzungen von Lemma 2 für jede auflösbare Untergruppe von $\pi_1 M$. So folgt die erste Behauptung.

Ist die Fundamentalgruppe selbst auflösbar, so gibt es demnach eine abelsche Untergruppe A von endlichem Index in $\pi_1 M$. Dann ist die universelle Überlagerung von M auch unter A noch kompakt homogen und somit flach nach Theorem 13, da sie keinen A -invarianten Unterraum niedrigerer Dimension enthalten kann. \square

5. Hyperbolische Mannigfaltigkeiten und hyperbolischer Typ

5.1 Hyperbolische und negativ gekrümmte Mannigfaltigkeiten

511. Wir wollen in diesem Kapitel Mannigfaltigkeiten betrachten, deren Geodätischer Fluß in einen kontrahierenden und einen expandierenden Anteil zerfällt. Wir werden sehen, daß Mannigfaltigkeiten strikt negativer Krümmung zu dieser Klasse gehören, die eine weitere Teilklasse der in Kapitel 3 besprochenen Mannigfaltigkeiten beschränkter Asymptote darstellt.

Def.: Wir nennen einen Fluß ϕ_t auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit U^m hyperbolisch, wenn sich TU in drei Unterbündel zerlegen läßt:

$$TU = X \oplus Y \oplus Z$$

mit Faserdimensionen k , $m-k-1$, 1 und $0 < k < m-1$, so daß

- (i) Das Vektorfeld $\frac{d}{dt} \phi_t$ ist tangential zu Z .
- (ii) Es gibt Konstanten $0 < a \leq 1 \leq b$ und $k > 0$ so, daß für alle $t \geq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \forall_{x \in X} \quad \|\phi_{t,x}\| &\leq b \cdot e^{-kt} \cdot \|x\|, \\ \|\phi_{-t,x}\| &> a \cdot e^{kt} \cdot \|x\|, \\ \forall_{y \in Y} \quad \|\phi_{t,y}\| &> a \cdot e^{kt} \cdot \|y\|, \\ \|\phi_{-t,y}\| &\leq b \cdot e^{-kt} \cdot \|y\|. \end{aligned}$$

k wollen wir den Wachstumskoeffizienten nennen.

Ist U kompakt und ϕ_t maßerhaltend, so heißt ϕ_t ein Anosov-Fluß (C-Fluß, U-Fluß).

Eine Mannigfaltigkeit M heiße hyperbolisch (HM), wenn gilt:

- (i) M ist ohne konjugierte Punkte (OK)
- (ii) M hat unten beschränkte Schnittkrümmung
- (iii) Der Geodätische Fluß ϕ_t auf SM ist hyperbolisch.

Eine Mannigfaltigkeit, deren Geodätischer Fluß auf dem Sphärenbündel vom Anosov-Typ ist, heißt Anosov-Mannigfaltigkeit.

Eine kompakte, hyperbolische Mannigfaltigkeit ist nach Definition Anosov-Mannigfaltigkeit. KLINGENBERG ([19]) hat bewiesen, daß auch die Umkehrung richtig ist: Eine kompakte Mannigfaltigkeit mit Geodätischem Fluß vom Anosov-Typ hat keine konjugierten Punkte und ist damit hyperbolisch. ANOSOV hat in [2] die nach ihm benannten Flüsse untersucht und u.a. folgendes Resultat erhalten:

Satz von ANOSOV: Sei U eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit und ϕ_t ein Anosov-Fluß auf U .

Beh.: Der Fluß ist ergodisch; insbesondere gibt es Orbits $t \mapsto \phi_t u$ für gewisse $u \in U$, die jedem Punkt von U beliebig nahekommen, und die übrigen Elemente $u' \in U$, die nicht auf solchen transitiven Orbits liegen, bilden eine Menge vom Maß 0 in U . (Bew. in [2].) \square

Für Anosov-Mannigfaltigkeiten bedeutet das, daß es transitive Geodätische gibt (TG), das sind Geodätische, deren Tangentialvektorfeld jeden Vektor des Sphärenbündels beliebig genau approximiert. Da wir uns zunächst für die ergodischen Eigenschaften nicht interessieren, setzen wir im folgenden nur Hyperbolizität voraus.

512. Die wichtigsten Beispiele hyperbolischer Mannigfaltigkeiten sind, wie schon HADAMARD ([16]) nach Ideen von LOBATSCHESKI für Flächen zeigte, Mannigfaltigkeiten strikt negativer, beschränkter Krümmung ("SN"), vgl. [2], [3]. Wir beweisen diesen Satz mit Hilfe der Asymptotischen Lösung D.

Theorem 15 Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $-r^2 < K < -k^2$, $r, k > 0$.

Beh.: M ist hyperbolisch mit Wachstumskoeffizient k und Konstanten $b = a^{-1} = 2(1+r^2)^{1/2}$.

Bew.: Ist $J(t)$ ein Jacobifeld längs einer beliebigen Geodätischen $c: \mathbb{R} \rightarrow M$, so können wir die Längenfunktion

$j(t) := \|J(t)\|$ folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned} j'' &= (\|J'\|^2 + \langle J'', J \rangle) \|J\|^{-1} - \langle J', J \rangle^2 \|J\|^{-3} \\ &= -K(J, c') \|J\| + (\|J'\|^2 \|J\|^2 - \langle J', J \rangle^2) \|J\|^{-3} \\ &> k^2 \cdot j \end{aligned}$$

Ist $f(t)$ eine Lösung der zugehörigen Differentialgleichung

$$f'' = k^2 \cdot f$$

mit Anfangswerten

$$f(0) = j(0), \quad f'(0) < j'(0),$$

so erfüllt die Differenzfunktion $j-f$ die gleiche Ungleichung:

$$(j-f)'' > k^2 (j-f).$$

Hätte $j-f$ eine positive Nullstelle t_1 , müßte sie im Intervall $(0, t_1)$ irgendwo ein Extremum annehmen. Da sie aber mit positiver erster Ableitung $(j-f)'(0) > 0$ startet, ist sie in $(0, t_1)$ positiv, falls t_1 als kleinste positive Nullstelle gewählt wurde. Dann ist wegen der Ungleichung $(j-f)''$ in diesem Intervall positiv und $(j-f)'$ daher monoton wachsend und nirgends in $(0, t_1)$ Null; $j-f$ kann also dort kein Extremum besitzen. Also gilt

$$j(t) > f(t) \quad \text{für alle } t > 0.$$

Setzen wir anstelle der obigen Anfangswerte

$$f(0) = j(0), \quad f'(0) \leq j'(0)$$

voraus, so gilt aus Stetigkeitsgründen immer noch

$$j(t) \geq f(t).$$

Insbesondere ist M ohne Fokalfunkte. Wir können daher die stetigen Jacobitensorfelder $D_V(t)$ und $E_V(t)$, die Antisymptotische Lösung, definiert als $E_V(t) := D_V(-t)$, untersuchen. Nach 423 ist

$$E_V'(0) = -D_V'(0) > 0.$$

Wenden wir nun die obenstehende Überlegung auf Jacobifelder

der Form $J(t) = E_v(t)x$, $x \perp v$, und

$$f(t) = \cosh(kt)$$

an, so erhalten wir für alle $v \in SM$:

$$\begin{aligned} \|E_v(t)^{-1}\|^{-1} &= \min \{ \|E_v(t)x\| ; x \perp v, \|x\| = 1 \} \\ &> \cosh(kt) > e^{kt/2} . \end{aligned}$$

Mit 133 ergibt sich eine umgekehrte Abschätzung für D:

$$\|D_v(t)\| = \|D_{\phi_t v}(-t)^{-1}\| = \|E_{-\phi_t v}(t)^{-1}\| < 2 \cdot e^{-kt} .$$

Bis hierher haben wir die untere Krümmungsschranke nicht verwendet. Zur Abschätzung des Geodätischen Flusses müssen wir aber auch das Verhältnis von Wert und Ableitung der Jacobifelder kontrollieren. Das leistet die untere Krümmungsschranke. Nach 213 gilt nämlich für alle $x \in \mathbb{R}^{n-1}TM$ und $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \|D'(t)x\| &\leq r \|D(t)x\| , \\ \|E'(t)x\| &\leq r \|E(t)x\| . \end{aligned}$$

Damit können wir die kontrahierende Distribution als unsere alte stabile Distribution definieren (343):

$$\mathcal{X} := \text{Bild } f_D ,$$

und für alle $\underline{x} = (x, D'(0)x) \in \mathcal{X}$ gilt für $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} \|\phi_{t*}\underline{x}\| &= (\|D(t)x\|^2 + \|D'(t)x\|^2)^{1/2} \\ &< 2(1+r^2)^{1/2} \cdot e^{-kt} \cdot \|\underline{x}\| . \end{aligned}$$

Entsprechend definieren wir die expandierende Distribution:

$$\mathcal{Y} := \text{Bild } f_E ,$$

und für alle $\underline{y} = (y, E'(0)y) \in \mathcal{Y}$ gilt für $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} \|\phi_{t*}\underline{y}\| &= (\|E(t)y\|^2 + \|E'(t)y\|^2)^{1/2} \\ &> \frac{1}{2} \cdot e^{kt} \|y\| , \end{aligned}$$

und wegen

$$\|\underline{y}\| \leq (1+r^2)^{1/2} \|y\|$$

ist

$$\|\phi_{t*}\underline{y}\| > 2^{-1}(1+r)^{-1/2} \cdot e^{kt} \|\underline{y}\| .$$

Die Abschätzungen für negative t-Werte ergeben sich, wenn man $E_v(t) = D_{-v}(-t)$ berücksichtigt. \square

513. Wir werden im folgenden Abschnitt sehen, daß der Satz 512 in gewisser Weise umkehrbar ist: Hyperbolische Mannigfaltigkeiten beschränkter Krümmung verhalten sich im Großen wie Mannigfaltigkeiten strikt negativer Krümmung. Grundlage dafür ist die folgende Abschätzung des Jacobitensors A.

Satz: Sei M eine hyperbolische Mannigfaltigkeit mit Konstanten a, b, k sowie unterer Krümmungsschranke $-r^2$, $0 < k \leq r$.

Beh.: M ist Mannigfaltigkeit beschränkter Asymptote mit Wachstumsfunktion

$$\|A(t)^{-1}\|^{-1} \geq (b \cdot r \cdot \sqrt{1 + r^2})^{-1} \cdot \sinh(kt) \quad .$$

Bew.: Nach 343 ist M von beschränkter Asymptote, und für die kontrahierende Distribution gilt:

$$\mathcal{X} = \text{Bild } f_D \quad ,$$

wo D die Asymptotische Lösung. Dann können wir D folgendermaßen abschätzen: Für jedes $x \in \mathcal{X}^{\text{TM}}$ und $t > 0$ ist

$$\begin{aligned} \|D(t)x\| &\leq \|(x, D'(0)x)\| \cdot b \cdot e^{-kt} \\ &\leq \|x\| \cdot b \cdot \sqrt{1 + r^2} \cdot e^{-kt} \quad . \end{aligned}$$

Das liefert eine Abschätzung für die Norm von D und die Unternorm der Antiasymptotischen Lösung E (s.S.99!), denn nach 133 ist für alle $v \in \mathcal{SM}$

$$E_v(t) = D_{-v}(-t) = D_{-\phi_t v}(t)^{-1} \quad .$$

Daher

$$\|E_v(t)^{-1}\| = \|D_{-\phi_t v}(t)\| \leq b \sqrt{1 + r^2} \cdot e^{-kt} \quad .$$

Zwischen A und E besteht nach 122 folgende Beziehung:

$$A(t) = E(t) \int_0^t (E^{-1}E)^{-1}(u) du \quad .$$

Daraus ergibt sich eine Abschätzung für das Wachstum von A.

indem wir die Unternormen betrachten (vgl. Anhang):

$$\begin{aligned} \|A^{-1}\|^{-1} &\geq \|E^{-1}\|^{-1} \left\| \left[\int_0^t (E E)^{-1}(u) du \right]^{-1} \right\|^{-1} \\ &\geq \|E^{-1}\|^{-1} \int_0^t \|E(u)\|^{-2} du \end{aligned}$$

Es bleibt noch $\|E(u)\|$ nach oben abzuschätzen. Dazu benutzen wir den Vergleichssatz 212. Wegen

$$E'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} D_t^{-1}(0) > D_s'(0) \quad \text{für alle } s > 0$$

(132) ist die Bedingung (§) in 212 für alle Jacobifelder der Form E_x , $\|x\| = 1$, und alle $s > 0$ erfüllt. Da nach 213 $\|E'(0)\| < r$ ist, erfüllt die Vergleichslösung $j(t)$: $= e^{rt}$ die in 212 geforderten Anfangswertbedingungen

$$j(0) = \|E(0)x\|, \quad j'(0) \geq \|E'(0)x\|$$

für alle $x \in \mathbb{R}^{n \times 1, TM}$ mit $\|x\| = 1$, und also gilt:

$$\|E(u)\| \leq e^{ru}.$$

Somit können wir unsere Abschätzung von A fortsetzen:

$$\begin{aligned} \|A(t)^{-1}\|^{-1} &\geq (b \sqrt{1+r^2})^{-1} e^{kt} \int_0^t e^{-2ru} du \\ &= (2rb \sqrt{1+r^2})^{-1} (1 - e^{-2rt}) e^{kt} \\ &= (rb \sqrt{1+r^2})^{-1} (e^{kt} - e^{-kt} e^{-2(r-k)t})/2 \\ &\geq (br \sqrt{1+r^2})^{-1} \sinh(kt). \quad \square \end{aligned}$$

5.2 Geodätische auf hyperbolischen Mannigfaltigkeiten

521. Wir wollen in diesem Abschnitt das Verhalten der Geodätischen in Größen auf einfach zusammenhängenden hyperbolischen Mannigfaltigkeiten studieren. Das letzte Ergebnis 513 gestattet uns, Längen abzuschätzen. Daraus gewinnen wir, ähnlich wie in 354, einen Winkelvergleichssatz, der mit anderen Methoden bereits von KLIN-GENBERG ([19]) in etwas schwächerer Form bewiesen worden ist.

Theorem 16 Sei M eine einfach zusammenhängende hyperbolische Mannigfaltigkeit mit Krümmungsschranke $K > -r^2$ und Wachstumskoeffizient $k < r$. Dann gibt es zu jedem $k' \in (0, k)$ eine Schranke $T = T(k') > 0$, so daß folgendes gilt:
Sei $p \in M$ ein beliebiger Punkt und $o, o \in M$ Punkte im Abstand $> T$ von p . Sei $\tilde{M} := H_k$, der hyperbolische Standardraum konstanter Krümmung $-k^2$ und $p, q, o \in M$ Vergleichspunkte, die ein Dreieck gleicher Kantenlänge wie $\Delta(p, q, o)$ aufspannen. $\gamma = \angle(o, p, q)$ und $\tilde{\gamma} = \angle(\tilde{o}, \tilde{p}, \tilde{q})$ seien die Winkel bei p und \tilde{p} in diesen Dreiecken.

Beh.: $\gamma < \tilde{\gamma}$.

Bew.: Sei $b > 1$ die Konstante der kontrahierenden Abschätzungen des Geodätischen Flusses von M . Die Zahl $m := br\sqrt{1+r^2}$ ist sicher größer als k . Daher liegt die Funktion

$$f(t) := m^{-1} \cdot \sinh(kt)$$

aus 513 sicher unter der Funktion $g(t) := k^{-1} \cdot \sinh(kt)$, die das Wachstum von A in H_k bestimmt. Das können wir aber ändern, indem wir bei der Funktion g das k durch ein beliebiges $k' < k$ ersetzen:

$$f(t) = m^{-1} \cdot (e^{kt} - e^{-kt})/2 > m^{-1} e^{(k-k')t} \sinh(k't),$$

also gilt für das so abgeänderte g

$$\begin{aligned} f(t) - g(t) &> (e^{(k-k')t} - m/k) \cdot m^{-1} \cdot \sinh(k't) \\ &> 0 \quad \text{für } t > \log(m/k)/(k-k') =: T. \end{aligned}$$

Für Abstände $t > T$ exponentiert die Exponentialabbildung von M also stärker als die auf $\tilde{M} := H_{k'}$, und wie in 353 erhalten wir einen Längenvergleichssatz zwischen M und \tilde{M} : Die Schenkel des gleichen Winkels haben in M einen größeren Abstand voneinander als in \tilde{M} . Der Winkelvergleichssatz ergibt sich dann genau analog zu 354: Wir betrachten dazu diejenigen Punkte \tilde{o}' im Abstand $|\tilde{p}, \tilde{o}'|$ von \tilde{p} auf \tilde{M} , für die $\angle(\tilde{o}', \tilde{p}, \tilde{q}) < \gamma$. Dann ist nach dem Strecken-

vergleichssatz

$$|o, o| > |o', o| \quad .$$

Also ist o nicht ein Punkt von dieser Art, und es gilt somit

$$\tilde{\gamma} = \angle(o, p, q) > \gamma \quad .$$

522. Sei M auch weiterhin eine einfach zusammenhängende hyperbolische Mannigfaltigkeit. Nach 513 ist M von beschränkter Asymptote, und wir wollen daher die unendliche Kompaktifizierung $\bar{M} = M \cup L(M)$ untersuchen (vgl. 3.2).

Theorem 17 Für jedes Paar $P, Q \in L(M)$ von uneigentlichen Punkten gibt es bis auf Parametertransformationen genau eine Geodätische von P nach Q . ("Axiom 3, stetige Konvexität" in der Bezeichnungsweise von EBERLEIN [5] .)

Bew.: 1. Der Winkelvergleichssatz 521 gewährleistet, daß Axiom 1 "Visibility" von EBERLEIN erfüllt ist: Von einem Punkt $p \in M$ aus können wir für jedes $\epsilon > 0$ einen Abstand $R > 0$ finden mit folgender Eigenschaft: Der "Sichtwinkel" von p aus, unter dem eine beliebig lange Geodätische $c: [a, b] \rightarrow M$ außerhalb des R -Balles um p erscheint, wird klein für große R :

$$\angle(c(a), p, c(b)) < \epsilon \quad \text{falls} \quad d(p, \text{Bild } c) > R \quad .$$

Es sei nämlich so eine Situation gegeben. Wegen der Dreiecksungleichung gibt es einen Punkt q auf der Strecke c mit

$$|q, c(a)| \leq |p, c(a)| \quad , \quad |q, c(b)| \leq |p, c(b)| \quad .$$

Sei $o := c(a)$. Auf einer Vergleichsmannigfaltigkeit $\tilde{M} := H_K$, im Sinne von 521 betrachten wir ein Dreieck $(\tilde{o}, \tilde{p}, \tilde{q})$ mit gleicher Kantenlänge wie $\Delta(o, p, q)$; $\tilde{\gamma}$ und $\tilde{\gamma}'$ seien die Winkel bei p bzw. bei \tilde{p} . Nach dem hyperbolischen Cosinussatz gilt nun:

$$\begin{aligned} \cos \tilde{\gamma} &= \frac{\cosh |o, p| \cdot \cosh |p, q| - \cosh |q, o|}{\sinh |o, p| \cdot \sinh |p, q|} \\ &> \frac{\cosh |o, p| \cdot (\cosh |p, q| - 1)}{\sinh |o, p| \cdot \sinh |p, q|} > \frac{\cosh |p, q| - 1}{\cosh |p, q|} \end{aligned}$$

$$\cos \tilde{\gamma} > 1 - 2 e^{-|p,q|} > 1 - 2 e^{-R}$$

Somit ist nach 521

$$\gamma < \tilde{\gamma} < \arccos(1 - 2 e^{-R})$$

Die gleiche Abschätzung erhalten wir auch für den Komplementwinkel

$$\delta := \angle(q, p, c(b))$$

wenn wir $c(a) = o$ durch $c(b)$ ersetzen. Damit ergibt sich für den Sichtwinkel der Strecke c :

$$\angle(c(a), p, c(b)) = \gamma + \delta < 2 \arccos(1 - 2 e^{-R})$$

er wird also beliebig klein, wenn nur R genügend groß ist.

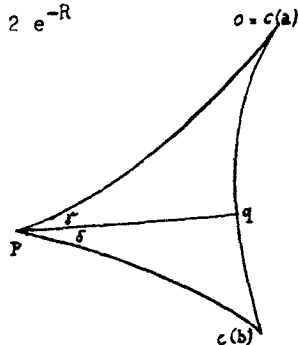
2. Aus "Axiom 1" folgt die Existenz einer Verbindungsgeodätischen für beliebige uneigentliche Punkte $P, Q \in L(M)$, $P \neq Q$. Wir betrachten dazu von dem in 1. gewählten Punkt $p \in M$ ausgehende Strahlen r nach P und s nach Q und für eine Folge $t_i \rightarrow \infty$ die Strecken c_i von $r(t_i)$ nach $s(t_i)$. Die c_i müssen alle eine geeignete kompakte Umgebung K von p in M treffen, denn sonst würde $d(p, c_i)$ divergieren und daher nach 1. die Winkel $\gamma_i = \angle(r(t_i), p, s(t_i))$ für $i \rightarrow \infty$ gegen Null streben. Es handelt sich jedoch immer um den festen Winkel $\gamma_i = \gamma = \angle(r, s)$ für alle i , der nicht verschwindet! So wissen wir, daß für geeignetet Parameterwerte u_i die Punkte $q_i := c_i(u_i)$ alle in K liegen und daher eine Teilfolge der Vektoren $c_i'(u_i)$ gegen einen Vektor $v \in SM|_K$ konvergiert. Im Sinne von Satz 333 gehören die Vektoren $c_i'(u_i)$ zu den Vektorfeldern V_{t_i} bezüglich der Geodätischen s :

$$c_i'(u_i) = V_{t_i}(q_i)$$

Dann ist nach 333

$$v = V(q)$$

wo $q = \lim_{i \rightarrow \infty} q_i$ und V das dort definierte asymptotische



Vektorfeld zu s ist, und somit ist die Geodätische c_v asymptotisch zu s . Ebenso sieht man, daß c_v Asymptote zu r ist, und daher verbindet c_v die beiden unendlich fernen Punkte P und Q miteinander.

3. Die Eindeutigkeit der geodätischen Verbindung von P nach Q sieht man mit 342: Gäbe es außer c_v noch eine weitere Geodätische von P nach Q , die sich von c_v nicht bloß durch eine Parametertransformation unterscheidet, so gäbe es ein nach beiden Seiten beschränktes Jacobifeld J längs c_v , das demnach von der Form $J(t) = D_v(t)x = E_{-v}(-t)x$ wäre für ein geeignetes $x \neq 0$. $E_{-v}x$ wäre also beschränkt, im Widerspruch zu Hyperbolizität (vgl. etwa Bew. 513)!

523. Als nächstes wollen wir untersuchen, wie die Normalen einer Geodätischen auseinanderstreben. Wichtigstes Hilfsmittel dazu ist der Winkelvergleichssatz 521.

"Zylindersatz" M sei eine einfach zusammenhängende hyperbolische

Mannigfaltigkeit, $c : \mathbb{R} \rightarrow M$ eine Geodätische, die von den Geodätischen $g, g_0 : \mathbb{R} \rightarrow M$ in den Punkten $p = c(0)$ und $q = c(1)$ senkrecht geschnitten wird.

Beh.: Die Mindestlänge einer Kurve $\beta : [0, 1] \rightarrow M$ von $o := g_0(t)$ nach $r := g(t)$ mit Mindestabstand von c

$$d(b(s), c) \geq t \quad \text{für alle } s \in [0, 1]$$

(die also außerhalb eines Zylinders mit Achse c und Radius t verläuft) wächst für genügend großes l und t linear in l und exponentiell in t . Genauer: Ist k der Wachstumskoeffizient von M , so gibt es zu jedem positiven $k' < k$ eine Konstante $S > 0$, so daß für $l, t \geq S$ gilt:

$$L(\beta) > (2S \cdot \text{br} \sqrt{1+r^2})^{-1} \cdot (1 - S) \cdot \sinh(kt)$$

wo b die Konstante in der oberen Abschätzung von 511 und $-r^2$ die untere Krümmungsschranke bezeichnet.

Bew.: Für ein festes positives

$k' < k$ wählen wir

$$S := \max\{T(k'), \log 4\}.$$

Wir unterteilen nun die Geo-

dätische c durch j äqui-

distante Punkte, wo $j := \left\lceil \frac{1}{S} \right\rceil$

(größte ganze Zahl $\leq 1/S$):

$$p_i = c(is) \quad \text{für } i = 0, \dots, j.$$

Dazu seien $o_i := (\beta(s_i))$ zugehörige Punkte auf β , so daß die Strecke g_i von p_i nach o_i senkrecht auf c steht.

Wenden wir den Winkelvergleichssatz 521 auf den Winkel γ bei p_{i-1} im Dreieck (o_i, p_{i-1}, p_i) an ($i = 1, \dots, j$), so ergibt sich aus dem hyperbolischen Cosinussatz

$$\begin{aligned} \cos \gamma &> \frac{\cosh |p_{i-1}, o_i| \cdot \cosh |p_{i-1}, p_i| - \cosh |p_i, o_i|}{\sinh |p_{i-1}, o_i| \cdot \sinh |p_{i-1}, p_i|} \\ &> \frac{\cosh |p_{i-1}, o_i| \cdot (\cosh |p_{i-1}, p_i| - 1)}{\sinh |p_{i-1}, o_i| \cdot \sinh |p_{i-1}, p_i|}, \end{aligned}$$

denn in einem Vergleichsdreieck gleicher Kantenlänge in H_K , ist der Winkel bei p_i stumpf und daher

$$|p_{i-1}, o_i| > |p_i, o_i|.$$

So erhalten wir wie in 522:

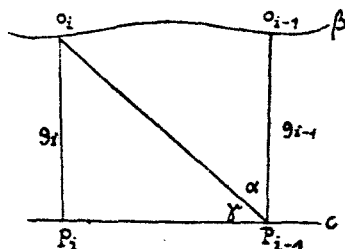
$$\gamma < \arccos(1 - 2e^{-S}) < \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Jetzt wollen wir die Länge von β zwischen s_{i-1} und s_i abschätzen. Da es nach 513 für $|\Lambda(t)^{-1}|^{-1}$ eine monoton wachsende untere Schranke

$$a(t) = (br \sqrt{1+r^2})^{-1} \sinh(kt)$$

gibt und da außerdem die Kurve β von p_{i-1} einen Abstand $\geq t$ hat, erhalten wir wie in 223

$$\begin{aligned} \int_{s_{i-1}}^{s_i} \|\beta(s)\| ds &> \alpha \cdot a(t) > \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) \cdot a(t) > \frac{1}{2} a(t) \\ &> (2br \sqrt{1+r^2})^{-1} \sinh(kt). \end{aligned}$$



Die Gesamtlänge von β läßt sich also folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned} L(\beta) &> \left[\frac{1}{S} \right] (2br \sqrt{1+r^2})^{-1} \cdot \sinh(kt) \\ &> (2S \cdot br \sqrt{1+r^2})^{-1} \cdot (1 - S) \sinh(kt) \quad . \quad \square \end{aligned}$$

5.3 Mannigfaltigkeiten vom hyperbolischen Typ

531. Das exponentielle Wachstum des expandierenden Teils des Geodätischen Flusses bestimmt die Geometrie einer kompakten hyperbolischen Mannigfaltigkeit so sehr, daß wichtige geometrische Eigenschaften erhalten bleiben, wenn wir die Metrik beliebig verändern. Der Grund dafür ist, daß sich die Länge der Vektoren und damit die Abstandsfunktion nur innerhalb fester Schranken verändern kann, wenn wir die Metrik einer kompakten Mannigfaltigkeit verändern. Wir definieren deshalb allgemein auch für nichtkompakte Mannigfaltigkeiten:

Def.: Eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) , $g = \langle , \rangle$, heißt vom hyperbolischen Typ (HT), wenn es auf M eine hyperbolische Metrik (im Sinne von 511) $g^* = \langle , \rangle^*$ gibt, so daß zwei Konstanten $0 < C_1 \leq C_2$ existieren mit

$$(+)\quad C_1 \|x\|^* \leq \|x\| \leq C_2 \|x\|^*$$

für alle $x \in TM$.

Der Begriff wurde von KLINGENBERG ([18]) etwas spezieller eingeführt in dem Sinne, daß g^* eine Metrik strikt negativer Krümmung sein sollte. Ob die dadurch definierte Klasse von Mannigfaltigkeiten echt kleiner ist als unsere, ist allerdings nicht bekannt, denn man kennt bislang keine anderen Beispiele hyperbolischer Mannigfaltigkeiten als eben Deformationen von kompakten Mannigfaltigkeiten strikt negativer Krümmung. (Vgl. etwa [6].)

Eine kompakte Mannigfaltigkeit ist nach unserer Definition hyperbolisch genau dann, wenn sie eine Anosov-Metrik zuläßt.

Aus der Ungleichung (+) erhält man auch die entsprechende Abstandsabschätzung:

$$C_1 \cdot d^*(p, q) \leq d(p, q) \leq C_2 \cdot d^*(p, q)$$

für alle $p, q \in M$, wenn d^* die Abstandsfunktion bezüglich der Metrik g^* bezeichnet.

532. Die grundlegende Eigenschaft der HT-Mannigfaltigkeiten ist, daß die g -Strecken, die zwei Punkte verbinden, sich nicht weit von der entsprechenden g^* -Strecke entfernen, wobei wir unter einer Strecke jede kürzeste Geodätische zwischen zwei Punkten verstehen wollen. Im Folgenden verallgemeinern wir Sätze von KLINGENBERG ([18]).

Lemma: Es sei $\tilde{c}: R \rightarrow M$ eine g^* -Geodätische, \tilde{g}_1 und \tilde{g}_2 zwei g^* -Geodätische, die \tilde{c} in den Punkten $\tilde{c}(0)$ und $\tilde{c}(1)$, $1 > 0$, senkrecht schneiden.

Beh.: Es gibt positive Konstanten m_1 und m_2 mit folgender Eigenschaft: Ist $1 > m_1$, $t > m_2$, so kann eine Kurve $\beta: [0, 1] \rightarrow M$, die $\beta := \tilde{g}_1(t)$ mit $r := \tilde{g}_2(t)$ verbindet und g^* -Abstand

$$d^*(\beta(s), c) > t$$

von c hat, nicht (bis auf Parametrisierung) g -Strecke von 0 nach r sein.

Bew.: Nach der Vierecksungleichung ist

$$d^*(0, r) \leq 2t + 1,$$

$$d(0, r) \leq C_2(2t + 1) =: f_2(1, t)$$

wegen (+). Andererseits wissen wir aus 523, daß für $1, t \geq 8$

$$L^*(\beta) > \epsilon(1-S) \sinh(kt)$$

mit einer positiven Konstanten ϵ , und wegen (+)

$$L(\beta) > C_1 \epsilon(1-S) \sinh(kt) =: f_1(1, t)$$

Weil f_1 in t exponentiell wächst, gibt es eine Konstante $m_2 > 0$, so daß für alle $t \geq m_2$

$$f_1(2S, t) - f_2(2S, t) > 0.$$

Die Abbildung $l \mapsto f_1(l, t) - f_2(l, t)$ ist demnach für $l = 2S$ nichtpositiv, für $l = 0$ jedoch positiv. Da sie in l höchstens linear ist, gilt demnach

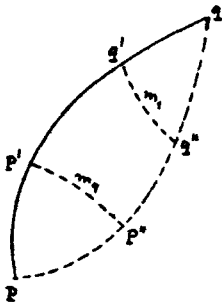
$$f_1(l, t) > f_2(l, t) \quad \text{für alle } t \geq m_2, \quad l \geq m_1 := 2S.$$

In diesem Fall kann β nicht kürzeste Verbindung von o nach r sein. □

Satz: Sei M eine Mannigfaltigkeit vom hyperbolischen Typ, einfach zusammenhängend. Dann gibt es eine Konstante $R > 0$, so daß für alle $p, q \in M$ gilt: Ist c eine g -Strecke von p nach q , \check{c} die g^* -Strecke von p nach q , so ist

$$d(c(s), \check{c}) < R \quad \text{für alle } 0 \leq s \leq d(p, q).$$

Bew.: Wird der g^* -Abstand von c nach \check{c} irgendwo größer als m_2 , so wird man vor und hinter dieser Stelle zwei Punkte $p' = c(s_1)$, $q' = c(s_2)$ finden, wo der g^* -Abstand zu \check{c} genau m_2 beträgt. Fällt man nun von p' und von q' das g^* -Lot auf \check{c} , so haben nach dem vorangegangenen Lemma die beiden Fußpunkte p'' und



q'' der Lote auf \check{c} einen Abstand $< m_1$, denn sonst könnte c nicht g -Strecke von p' nach q' sein. Nach (+) und der Vierecksungleichung ist der Umfang des Vierecks (p', q', q'', p'') aus g - und g^* -Geodätischen in der g -Metrik gemessen kleiner als

$$2 C_2(2m_2 + m_1).$$

Da kein Durchmesser eines solchen "krummen" Vierecks länger sein kann als der halbe Umfang, ist der Abstand von c nach \check{c} in der g -Metrik durch $R := C_2(2m_2 + m_1)$ beschränkt. □

533. Da die in 532 gewonnene Konstante R vom Abstand $d(p, q)$ der Endpunkte der Strecke unabhängig ist, können wir 532 folgendermaßen auch auf unendlich ferne Punkte erweitern:

Theorem 18 Sei M eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit vom hyperbolischen Typ. Dann gilt:

- (i) M erfüllt die unendliche Konvergenz, besitzt also eine Topologie im Unendlichen.
- (ii) Die unendliche Struktur ist nicht von der Metrik abhängig: $\bar{M} = M \cup L(M, g)$ kann in kanonischer Weise homöomorph mit $\bar{M}' := M \cup L(M, g^*)$ identifiziert werden.
- (iii) Je zwei Punkte $p, q \in \bar{M}$ lassen sich durch Kürzeste verbinden. Diese haben Abstand $\leq R$ von der g^* -Geodätischen von p nach q .

Bew.: Zu (i): Da (M, g^*) die Eigenschaft UK erfüllt (513), gibt es nach Definition 322 (S.57) eine positive Funktion \tilde{m} mit folgender Eigenschaft: Ist $(o_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine in M divergente Punktfolge, \tilde{r} und \tilde{s} zwei von p und q in M ausgehende echte g^* -Grenzstrahlen, so ist

$$d^*(\tilde{r}(t), \tilde{s}(t)) \leq m(d) \quad \text{für alle } t \geq 0, \quad d \geq d^*(p, q).$$

Da nun nach 532 die g -Strecken von p bzw. q nach o_1 nicht weiter als R von den entsprechenden g^* -Strecken entfernt sind, liegt jeder Grenzstrahl r von (o_1) mit Anfangspunkt p in der R -Tubenumgebung um \tilde{r} und jeder Grenzstrahl s mit Anfang q in der R -Tube um \tilde{s} . Also für alle $d \geq d^*(p, q)$, $t \geq 0$

$$\begin{aligned} d(r(t), s) &\leq d(\tilde{r}, \tilde{s}) + 2R \\ &\leq C_2 \cdot \tilde{m}(d) + 2R \end{aligned}$$

und

$$d(r(t), s(t)) \leq d(p, q) + 2 \cdot d(r(t), s)$$

Haben p und q also einen g -Abstand $\leq e$, so ist für alle $t \geq 0$

$$d(r(t), s(t)) \leq m(e) := e + 2(C_2 \cdot \tilde{m}(C_1^{-1} \cdot e) + 2R) .$$

Zu (ii): Sei $P \in L(M, g)$ und $r \in P$ eine repräsentierender Strahl. Für jede Folge $t_1 \rightarrow \infty$ konvergieren die g^* -Strecken von $r(0)$ nach $r(t_1)$ zu einem von $r(0)$ ausgehenden g^* -Strahl \tilde{r} , der einen unendlichen Punkt $\tilde{P} \in L(M, g^*)$ repräsentiert. Da sich alles in der R -Tubenumgebung von r abspielt hat, ist \tilde{P} nicht von der gewählten Folge (t_1) abhängig. Ebenso wenig hängt \tilde{P} vom Repräsentanten $r \in P$ ab, denn ein zweiter Strahl $s \in P$ müßte endlichen Abstand von r haben. So haben wir eine Zuordnung $P \mapsto \tilde{P}$ definiert. Auf dieselbe Art können wir eine umgekehrte Zuordnung $\tilde{P} \mapsto P'$ konstruieren, und da die repräsentierenden Strahlen von P und P' beide beschränkten Abstand von einem Repräsentanten von \tilde{P} haben, sind P und P' gleich, und die Zuordnung ist umkehrbar. Außerdem konvergiert eine in M divergente Punktfolge genau dann gegen $P \in L(M)$, wenn sie in der Topologie von M^* gegen \tilde{P} konvergiert ((TU_3) auf S.56). Also läßt sich die Identität auf M zu einem Homöomorphismus $M \rightarrow M^*$ fortsetzen. Wir werden daher M und M^* in Zukunft nicht mehr unterscheiden.

Zu (iii): Für $p, q \in M$ ist die Behauptung in 532 bewiesen. Sei also $P, Q \in L(M)$ und \tilde{c} eine g^* -Geodätische von P nach Q . Die g -Strecken c_t von $\tilde{c}(-t)$ nach $\tilde{c}(t)$ liegen alle in der R -Tube von c , und für eine geeignete Folge $t_1 \rightarrow \infty$ konvergieren die Strecken c_{t_1} gegen eine Kürzeste c von P nach Q .

Wir haben damit auch gezeigt, daß die Eigenschaften UD und UK wirklich unabhängig voneinander sind. Z.B. erfüllt jede Brezelfläche im R^3 die Eigenschaft UK, obwohl sie sicherlich konjugierte Punkte hat und also an uniforme Konvergenz nicht zu denken ist. Außerdem sehen wir, daß die Topologie im Unendlichen der universellen Überla-

gerung einer solchen Fläche erhalten bleibt, wie kraus auch immer die Brezel geknetet wird.

5.4 Kompaktheit

5.4.1. Wir wollen zum Schluß noch einige Konsequenzen erwähnen, die Kompaktheit für hyperbolische Mannigfaltigkeiten und solche vom hyperbolischen Typ nach sich zieht. Als erstes wollen wir ein Resultat verallgemeinern, das GROVE ([14]) für Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung bewiesen hat.

Theorem 19 Sei M eine kompakte hyperbolische Mannigfaltigkeit (Anosov-Mannigfaltigkeit). $\text{Diff}(M)$ bezeichne die Diffeomorphismengruppe und $I(M)$ die Isometriegruppe von M .

Beh.: $\text{Diff}(M)^0 \cap I(M) = \{1\}$,

d.h. es gibt keine nichttriviale Isometrie auf M , die diffeotop zur Identität ist.

Bew.: Sei $f_t: M \rightarrow M$ für $t \in [0,1]$ eine differenzierbare Schar von Diffeomorphismen derart, daß

$$f_0 = 1, \quad f_1 \in I(M).$$

Die Länge der Wege

$$w_p := (t \mapsto f_t(p)) : [0,1] \rightarrow M$$

von p nach $f_1(p)$ hängt stetig von p ab, ist also wegen der Kompaktheit von M beschränkt.

Sei jetzt \hat{M} die universelle Riemannsche Überlagerung von M mit Projektion $\pi: \hat{M} \rightarrow M$. Für jeden Punkt der Faser, $\hat{p} \in \pi^{-1}(p)$, gibt es genau einen Weg $w_{\hat{p}}: [0,1] \rightarrow \hat{M}$ mit

$$w_{\hat{p}}(0) = \hat{p} \quad \text{und} \quad w_p = \pi w_{\hat{p}} \quad (\text{Lift}),$$

und die Abbildung

$$\hat{f}_1 := (\hat{p} \mapsto w_{\hat{p}}(1)) : \hat{M} \rightarrow \hat{M}$$

ist wieder eine Isometrie (lokale Eigenschaft!).

w_p hat die gleiche Länge wie w_p , also ist f_1 eine Isometrie beschränkter Verschiebung auf M . Die Behauptung folgt dann aus dem nachstehenden Lemma. \square

Lemma: Sei M eine einfach zusammenhängende hyperbolische Mannigfaltigkeit. Dann gilt für jede nichttriviale Isometrie f auf M : Die Verschiebungsfunktion $d_f(p) := |p, f(p)|$ ist unbeschränkt.

Bew.: 1. f habe einen Fixpunkt $p \in M$. Da $f \neq 1$, gibt es eine Geodätische c durch den Punkt p , die unter f nicht punktweise festbleibt. c und fc schneiden sich also in p , fallen aber nicht zusammen. Daher wird wegen der uniformen Divergenz $d(c(t), fc)$ für große t beliebig groß und d_f ist unbeschränkt.

2. f habe keinen Fixpunkt. Sei c eine Geodätische in M , die nicht invariant unter f ist. Hätte c von der Geodätischen fc beschränkten Abstand, so gäbe es nach 342 ein nach beiden Seiten beschränktes Jacobifeld, was in einer hyperbolischen Mannigfaltigkeit unmöglich ist. \square

Insbesondere folgt aus dem Theorem, daß die Isometriegruppe einer kompakten hyperbolischen Mannigfaltigkeit diskret und damit (weil kompakt) endlich sein muß, wie auch von KLINGENBERG ([19]) bewiesen worden ist.

542. Wir zitierten in 511 das Resultat von ANOSOV, daß auf kompakten hyperbolischen Mannigfaltigkeiten transitive Geodätische existieren, Geodätische also, die jede Richtung auf M approximieren. MORSE und HEDLUND bewiesen in [22], daß dasselbe auch noch für kompakte Mannigfaltigkeiten vom hyperbolischen Typ der Dimension 2 richtig ist, sofern sie ohne konjugierte Punkte sind. Der Beweis benutzt aber im Grunde nur die Eigenschaft der uniformen

Divergenz (vgl. 233), wie im Folgenden gezeigt werden soll. Die Dimensionsbeschränkung kann also fallen, und der Satz gilt z.B. auch für kompakte BA-Mannigfaltigkeiten vom hyperbolischen Typ. Zunächst wollen wir das Problem reduzieren:

Lemma: Sei M eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit unendlicher Konvergenz (UK); M sei außerdem kompakt homogen unter der Gruppe G von Isometrien. Auf M gebe es einen Punkt p mit folgender Eigenschaft: Ist $U \subset L(M)$ eine beliebige offene Menge in $L(M)$, $S(U, p) \subset SM$ die Menge aller Tangentenvektoren von Strahlen von p nach U , so ist die Menge $G \cdot S(U, p)$ aller dazu kongruenten Vektoren dicht in SM .
Beh.: Es gibt einen transitiven Strahl auf M/G .

Bew.: Sei $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Basis von offenen Mengen für die Topologie von SM , d.h. jede offene Menge in SM enthält ein V_i . Sei U_1 eine abgeschlossene Umgebung in $L(M)$, so daß jeder Strahl von p nach U_1 die offene Menge V_1 trifft. Nach Voraussetzung gibt es einen Strahl von p nach \dot{U}_1 , dessen Tangentenvektor die Menge $G \cdot V_2$ trifft, und also eine abgeschlossene Umgebung $U_2 \subset U_1$, so daß die Tangentenvektoren jedes Strahls von p nach U_2 die offene Menge $G \cdot V_2$ treffen. Ebenso existiert $U_3 \subset U_2$, so daß die Tangentenvektoren jedes Strahls von p nach U_3 die offene Menge $G \cdot V_3$ treffen, usw. Da $L(M)$ kompakt ist, ist

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i \neq \emptyset.$$

Liegt Q in diesem Durchschnitt, so treffen die Tangentenvektoren eines Strahles von p nach Q jede Menge $G \cdot V_i$, $i \in \mathbb{N}$, und das Bild eines solchen Strahles unter der Projektion auf M/G approximiert jede Richtung auf M/G .

543. Ist M eine Anosov-Mannigfaltigkeit, so hat die Menge der nicht-transitiven Vektoren in SM das Maß 0 (vgl. 511). Also haben auch in fast allen Fasern $S_p M$ die nicht-transitiven Vektoren das Maß 0. Insbesondere existiert ein Punkt $p \in M$, so daß die transitiven Vektoren in $S_p M$ dicht liegen. Mit dieser Überlegung können wir das Lemma 542 im folgenden Theorem anwenden.

Theorem 2c Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit mit uniformer Divergenz und vom hyperbolischen Typ.

Beh.: Es gibt eine transitive Geodätische auf M .

Bew.: Nach 542 genügt es zu zeigen, daß für einen Punkt $p \in \hat{M}$ und für alle offenen Mengen U in $L(\hat{M})$ die Menge $G \cdot S(U, p)$ dicht ist in \hat{SM} , wo \hat{M} die universelle Überlagerung von M und $G := \pi_1(M)$ die Fundamentalgruppe. Nach dem oben Gesagten können wir p so wählen, daß es zu jeder offenen Menge U von $L(\hat{M})$ einen g^* -Strahl von p nach U gibt, dessen Projektion in M transitiv ist; diesen Strahl nennen wir \tilde{r} . Sei nun $v \in \hat{SM}$ ein beliebiger Einheitsvektor mit Fußpunkt $q \in \hat{M}$. Die zugehörige (g -)Geodätische $c := c_v$ habe die Endpunkte $A, B \in L(\hat{M})$. Wir wissen schon, daß die entsprechende g^* -Geodätische \tilde{c} von A nach B in der R -Tuben-umgebung um c liegt und durch r approximiert wird. Ist $C \in U$ der Endpunkt von \tilde{r} in $L(M)$, so gibt es demnach eine Folge $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in G , so daß

$$g_i p \rightarrow B \quad \text{und} \quad g_i C \rightarrow A,$$

und die g -Strahlen $g_i r$ approximieren c .

Sei q' ein Punkt auf c im Abstand $|q, q'| \leq R$ von q . q_i bezeichne eine Folge von Punkten auf $g_i \tilde{r}$, die gegen q' streben. Dann liegt $g_i^{-1}(q')$ für große i nahe bei $g_i^{-1}(q_i)$, und das sind Punkte auf \tilde{r} . Da die $g_i^{-1}(q')$ in keinem beschränkten Gebiet bleiben können, streben sie also gegen

Anhang: $(\frac{1}{2})$ -Tensorfelder längs Geodätischer

A1. Abschätzung von Endomorphismen

Ein Endomorphismus A eines euklidischen Vektorraums $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ kann durch die Obernorm $\|A\| = \max \{\|Ax\|; \|x\| = 1\}$ und die Unternorm $\|A^{-1}\|^{-1}$ abgeschätzt werden; ist A nicht umkehrbar, so geben wir dem Symbol $\|A^{-1}\|^{-1}$ die Bedeutung 0 . Dann gilt nämlich:

$$\|A^{-1}\|^{-1} = \min \{\|Ax\|; \|x\| = 1\}.$$

Bew.: $1 = \|A^{-1}Ax\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|Ax\|$, also $\|A^{-1}\|^{-1} \leq \|Ax\|$, falls $\|x\| = 1$. Andererseits gibt es einen Einheitsvektor x_0 mit $\|A^{-1}\|^{-1} = \|Ax_0\|$: Ist y ein Einheitsvektor mit $\|A^{-1}y\| = \|A^{-1}\|$, so setze $x_0 := A^{-1}y / \|A^{-1}\|$.

Für die Unternormen gelten die umgekehrten Abschätzungen wie für die Obernormen: Sind A und B zwei Endomorphismen von E , so ist

$$\|A^{-1}\|^{-1} \cdot \|B^{-1}\|^{-1} \leq \|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

Ist A symmetrisch, $A = A^*$, so sind $\|A\|$ und $\|A^{-1}\|^{-1}$ der größte und der kleinste Eigenwert-Betrag von A . In diesem Fall ist

$$\begin{aligned} \|A\| &= |\lambda| = \max \{|\langle Ax, x \rangle|; \|x\| = 1\}, \\ \|A^{-1}\|^{-1} &= |\mu| = \min \{|\langle Ax, x \rangle|; \|x\| = 1\}. \end{aligned}$$

Für jeden Endomorphismus A ist A^*A symmetrisch. Also gilt:

$$\begin{aligned} \|A\|^2 &= \max \{\langle Ax, Ax \rangle; \|x\| = 1\} \\ &= \max \{\langle A^*Ax, x \rangle; \|x\| = 1\} \\ &= \|A^*A\|. \end{aligned}$$

Ebenso

$$\|A^{-1}\|^{-2} = \|(A^*A)^{-1}\|^{-1}.$$

Auf der Menge der symmetrischen Endomorphismen von E ist eine Ordnungsrelation definiert: Es ist $A \succ B$ genau dann, wenn $A - B$ positiv (semi-)definit ist. Bezeichnet λ_i jeweils den

größten, λ_n den kleinsten Eigenwert. so gilt für $A > B$:

$$\lambda_1(A) > \lambda_1(B) \quad , \quad \lambda_n(A) > \lambda_n(B) \quad .$$

Im Raum der symmetrischen Endomorphismen ist also ein Intervall

$\{X \mid A < X < B\}$ stets beschränkt.

A2. Differentiation von $\binom{1}{1}$ -Tensorfeldern

Sei wieder (M, \langle, \rangle) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, I ein reelles Intervall, $c: I \rightarrow M$ eine Geodätische und $Y(t)$ ein C^1 -differenzierbares $\binom{1}{1}$ -Tensorfeld längs c . Die Regeln der kovarianten Differentiation eines solchen Tensorfeldes sind die zeitabhängiger Matrizen, denn unter einer sog. Fermi-Basis $E_1(t), \dots, E_n(t)$ aus parallelen Vektorfeldern längs c wird aus der kovarianten die gewöhnliche Differentiation der Matrixkoeffizienten $Y^i_j(t)$. Insbesondere gilt die Produktregel für zwei Tensorfelder $A(t), B(t)$:

$$(AB)' = A'B + AB' \quad ,$$

und die folgende Quotientenregel:

$$(A^{-1})' = A^{-1}A'A^{-1} \quad ,$$

denn $0 = (AA^{-1})' = A'A^{-1} + A(A^{-1})' \quad .$

A3. Integration

Wenn wir die Räume $T_{c(t)}M$ für alle $t \in I$ per Parallelverschiebung identifizieren, so können wir für ein $\binom{1}{1}$ -Tensorfeld $A(t)$ längs c die lineare Abbildung

$$(x \longmapsto \int_{t_0}^t A(t)x \, dt) : T_{c(0)}M \longrightarrow T_{c(0)}M$$

definieren; statt $A(t)$ müßten wir eigentlich $P_t^{-1} \cdot A(t) \cdot P_t$ schreiben, wobei $P_t: T_{c(0)}M \longrightarrow T_{c(t)}M$ die Parallelverschiebung bezeichnet. Damit haben wir einen Endomorphismus

$$X = \int_{t_0}^t A(t) dt \quad .$$

von $T_c(0)^M$ definiert, dessen Matrixkoeffizienten bezüglich einer Fermibasis sich schreiben würden als

$$X^i_j = \int_{t_0}^{t_1} A^i_j(t) dt$$

Wir können X also wie ein Integral zeitabhängiger Matrizen behandeln.

Wie verhält sich die Integration zu den Normen bei symmetrischem $A(t) \geq 0$? Dann ist auch $\int A(t) dt$ symmetrisch und ≥ 0 , und

$$\begin{aligned} \left\| \int A(t) dt \right\| &= \max \left\{ \left\langle \int A(t) x dt, x \right\rangle : \|x\| = 1 \right\} \\ &= \max \left\{ \int \langle A(t) x, x \rangle dt : \|x\| = 1 \right\} \\ &\leq \int \max \left\{ \langle A(t) x, x \rangle : \|x\| = 1 \right\} dt \\ &= \int \|A(t)\| dt \end{aligned}$$

Indem man das Maximum durch das Minimum ersetzt, beweist man ebenso:

$$\left\| \left(\int A(t) dt \right)^{-1} \right\|^{-1} \geq \int \|A(t)^{-1}\|^{-1} dt$$

Literaturverzeichnis

1. ABRAHAM, R.: Foundations of Mechanics. - Benjamin 1967
2. ANOSOV, D.V.: Geodesic flow on closed Riemannian manifolds with negative curvature. - Proc. Steklov Inst. of Math. 90 (1967)
3. ARNOLD, V.I., AVEZ, A.: Ergodic problems of classical mechanics. - Benjamin 1968
4. BISHOP, R.L., O'NEILL, B.: Manifolds of negative curvature. Trans. Am. Math. Soc. 145 (1969), 1 - 45
5. EBERLEIN, P.: Geodesic flow on negatively curved manifolds I. Ann. of Math. 95 (1972), 492 - 510
6. EBERLEIN, P.: When is a geodesic flow Anosov? I. - J. Diff. Geom. 8 (1973), 437 - 463
7. EBERLEIN, P., O'NEILL, B.: Visibility manifolds. Pacific J. of Math. 46 (1973), 45 - 109
8. EHRLICH, P.: Zwei Bemerkungen über die Ricci-Krümmung. - Eingereicht an Zeitschr. f. Math.
9. GREEN, L.W.: Surfaces without conjugate points. - Trans. Am. Math. Soc. 76 (1954), 529 - 546
10. GREEN, L.W.: Geodesic Instability. - Proc. Am. Math. Soc. 7 (1956), 438 - 448
11. GREEN, L.W.: A theorem of E. Hopf. - Michigan Math. J. 5 (1958), 31 - 34
12. GROMOLL, D., KLINGENBERG, W., MEYER, W.: Riemannsche Geometrie im Großen. - Springer Lecture Notes in Mathematics 55, 1968
13. GROMOLL, D., WOLF, J.: Some relations between the metric structure and the algebraic structure of the fundamental

- group in manifolds of nonpositive curvature. - *Bull. Am. Math. Soc.* 77 (1971), 545 - 551
14. GROVE, K.: Isometry-invariant geodesics. - *Topology* 13 (1974), 281 - 292
 15. GULLIVER, R.: On the variety of manifolds without conjugate points.
 16. HADAMARD, J.: Les surfaces a courbures opposées et leur lignes geodesiques. - *J. Math. pures et appliquees* (1898), 27 - 73
 17. HAWKING, S.W., ELLIS, G.F.R.: The large scale structure of spacetime. - Cambridge 1973
 18. KLINGENBERG, W.: Geodätischer Fluß auf Mannigfaltigkeiten vom hyperbolischen Typ. - *Inv. Math.* 14 (1971), 63 - 82
 19. KLINGENBERG, W.: Riemannian manifolds with geodesic flow of Anosov type. - *Ann. of Math.* 99 (1974), 1 - 13
 20. KOBAYASHI, S., NOMIZU, K.: Foundations of differential geometry II. - Interscience 1965
 21. MILNOR, J.: Morse theory. - Princeton 1963
 22. MORSE, M., HEDLUND, G.: Manifolds without conjugate points. - *Trans. Am. Math. Soc.* 51 (1942), 362 - 386
 23. O'SULLIVAN, J.J.: Manifolds without conjugate points. - *Math. Ann.* 210 (1974), 295 - 311
 24. O'SULLIVAN, J.J.: On certain Riemannian manifolds without focal points. - *Eingereicht an J. Diff. Geom.*
 25. OZOLS, V.: Critical points of the displacement function of an isometry. *J. Diff. Geom.* 3 (1969), 411 - 432
 26. PENROSE, R.: Techniques of differential topology in relativity. - Regional conference series in applied mathematics 7, 1972
 27. YAU, S.T.: On the fundamental group of compact manifolds of nonpositive curvature. - *Ann. of Math.* 93 (1971), 579 - 585
 28. YAU, S.T.: Thesis. Berkeley 1970